

Alkalmazott matematikai lapok

2007/1

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

24.

KÖTET

ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

ALAPÍTOTTÁK

KALMÁR LÁSZLÓ, TANDORI KÁROLY, PRÉKOPA ANDRÁS, ARATÓ MÁTYÁS

FŐSZERKESZTŐ

PÁLES ZSOLT

FŐSZERKESZTŐ-HELYETTESEK

BENCZÜR ANDRÁS, SZÁNTAI TAMÁS

FELELŐS SZERKESZTŐ

VIZVÁRI BÉLA

TECHNIKAI SZERKESZTŐ

KOVÁCS GERGELY

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI

Arató Mátyás, Csirik János, Csiszár Imre, Csörgő Sándor, Demetrovics János, Ésik Zoltán, Farkas Miklós, Frank András, Fritz József, Galántai Aurél, Garay Barna, Gécseg Ferenc, Gerencsér László, Györfi László, Györi István, Harnos Zsolt, Hatvani László, Heppes Aladár, Iványi Antal, Járai Antal, Kátai Imre, Katona Gyula, Klafszy Emil, Komáromi Éva, Komlósi Sándor, Kovács Margit, Krisztin Tibor, Lovász László, Maros István, Michaletzky György, Pap Gyula, Prékopa András, Rapcsák Tamás, Recski András, Rónyai Lajos, Schipp Ferenc, Stoyan Gisbert, Szeidl László, Tusnády Gábor, Varga László

KÜLSŐ TAGOK:

Csendes Tibor, Fazekas Gábor, Fazekas István, Forgó Ferenc, Friedler Ferenc, Fülöp Zoltán, Imreh Balázs, Kormos János, Kuba Attila, Maksa Gyula, Racskó Péter, Tallos Péter, Temesi József

24. kötet

Szerkesztőség és kiadóhivatal: 1027 Budapest, Fő u. 68.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását. A szerkesztőbizottság bizonyos időnként lehetővé kívánja tenni, hogy a legjobb cikkek nemzetközi folyóiratok különszámaként angol nyelven is megjelenhessenek.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

A kéziratok a főszerkesztőhöz, vagy a szerkesztőbizottság bármely tagjához beküldhetők. A főszerkesztő címe:

Páles Zsolt, főszerkesztő

1027 Budapest, Fő u. 68.

A folyóirat e-mail címe: aml@math.elte.hu

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

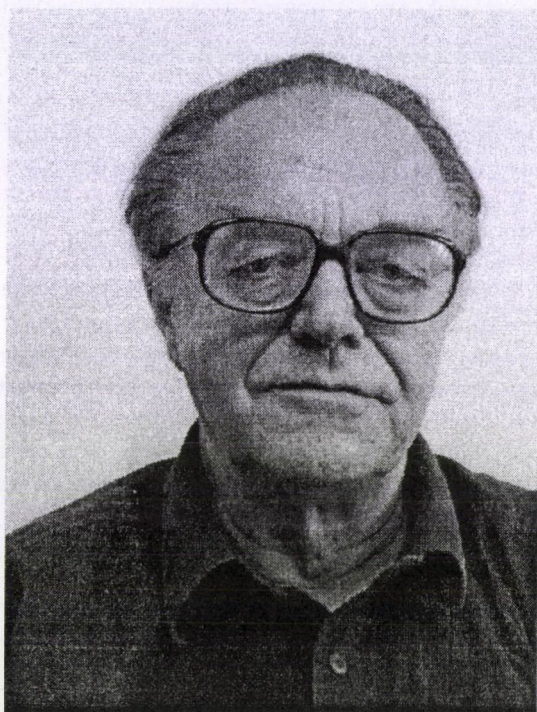
Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára évfolyamonként 1200 forint. Megrendelések a szerkesztőség címén lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

MESZÉNA GYÖRGY MÉLTATÁSA AZ EGERVÁRY JENŐ-EMLÉKPLAKETT ÁTADÁSA ALKALMÁBÓL

SZÁNTAI TAMÁS



Meszéna György 1931-ben született Kiskomáromban, agrár-értelmiségi családban. 8 gimnáziumot Pannonhalmán végezett, majd 1949-53 között matematika, fizika és ábrázoló geometria szakos tanári diplomát szerzett a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetemen. Az egyetemi évei alatt két évet a Matematikai Intézetben dolgozott, ahol az akkori demonstrátori rendszerben heti 6 órában gyakorlatot vezetett. Ez akkor fél tanársegédi állásnak számított. 53-57 között a debreceni Fazekas Mihály Gyakorló Gimnáziumban tanított, 57-61 között tudományos munkatársi besorolással az MTA debreceni Atommagkutató Intézetének matematikusaként dolgozott. Itt legjelentősebb munkája egy 800 ezer voltos kaszkád-generátor elektronoptikájának a méretezése és a hazai urán lelőhely kutatások mérési eredményeinek feldolgozása voltak. 1961-ben pályázat útján került az MKKE Matematikai Tanszékére, ahol Szép Jenő és Krekó Béla professzorok vezetésével kezdte

egyetemi pályafutását, mely azóta is folyamatosan tart. 1966-ban a Budapesti Műszaki Egyetemen híradástechnika szakos villamosmérnöki oklevelet, azaz mai szóhasználattal másoddiplomát szerzett. Az 1976-ban létrehozott MSZI Közgazdasági Alkalmazások Osztályának docensi besorolású vezetője lett. 92-ben az Osztály jogutódja az Operációkutatási Tanszék lett, s ekkor ennek vezetőjévé is őt nevezték ki. 1993-ban habilitált és ugyanekkor egyetemi tanári kinevezést kapott. Jelenleg a tanszék professzor emeritusa.

Tanszéki oktatómunkája első évtizedében a felmerülő igényeknek megfelelően valamennyi matematikai alaptárgyat tanította. Ki kell ezek közül emelni azt, hogy az MKKE-re kerülését közvetlenül követően ő oktatta először a valószínűségszámítás tárgyat. Jelentős szerepet vállalt a terv-matematika szak beindításában, melynek, illetve jogutódjainak tanszéki (később intézeti) felelőse volt. Kezdetől fogva oktatta e szakon a matematikai statisztika tárgyat. A megelőző valószínűségszámítás tárggyal összevontan ez képezte a tervgazdasági szak egyetlen matematika szigorlatának a tananyagát. Ennek a képzésnek a keretében a hallgatók üzemi gyakorlatait szervezte, részt vett az államvizsgákon, igen sok hallgató készítette szakszemináriuma keretében diplomamunkáját. Ugyancsak a tervgazdasági szak oktatásának keretében vezette be a sokváltozós statisztika oktatását. E korszerű és igen jelentős alkalmazásokat és fejlődést felmutató számítógépes diszciplína oktatása Meszéna György tevékenységének köszönhetően elsőként került bevezetésre a magyar egyetemeken. Hosszú ideig tanított esti és levelező tagozaton is, valamint a tagozat indulása után több mint tíz évig a mérnök-közgazdászok matematika oktatását is végezte, mely során olyan specifikus tananyagokat alakított ki, melyeket azután több mint 20 éven át oktatott a közgazdászok továbbképző intézetében is. Foglalkozott a közgazdasági szakokleveles jogászok és mérnökök oktatásával is, és a PhD képzés beindulásakor abba is azonnal bekapcsolódott.

Meszéna György iskolateremtő tevékenységét fémjelzi az a baráti munkaközösség, amelyet maga körül ki tudott alakítani és az a sok kiváló tanítványa, akik közül a teljesség igénye nélkül néhányat az alábbiakban felsorolok:

- Füstös László, az MTA doktora, habilitált, kutató professzor,
- Chikán Attila, az MTA doktora, habilitált, tanszékvezető egyetemi tanár, az MTA Közgazdasági Osztályán alakult Logisztikai Bizottság elnöke,
- Matics Ágnes, a Nemzetközi Bankárképző Központ oktatója,
- Kovács Erzsébet, habilitált egyetemi tanár, az aktuárius képzés vezetője,
- Mikó Gyula, az Aviva Életbiztosító Zrt. Vezérigazgató helyettese, vezető biztosítási matematikus,
- Horváth Gézané, a Külkereskedelmi Főiskola tanszékvezető főiskolai tanára,
- Szép Katalin, a Központi Statisztikai Hivatal főosztályvezetője,
- Torda Éva, a Westel marketing igazgatóhelyettese.

Meszéna György kutatómunkája szorosan kapcsolódott a Matematika Tanszék, illetve a Matematikai és Számítástudományi Intézet alkalmazói tevékenységéhez. Meszéna György matematikai módszerek közgazdasági alkalmazásai terén végzett tevékenysége tartalmi oldalról három fő területre oszlik. A készletgazdálkodás matematikai modellezési problémái, a gazdasági kockázat számítása és a beruházás gazdaságosság összetett kérdésköre. Mindhárom területhez több mint 10 éves munkája tartozik, mindegyik vonatkozásban többtagú munkacsoportban dolgozott, a két utolsó esetben a csoport vezetője is volt. A végzett munkák eredményeit számos tanulmányban, valamint mindhárom területről egy-egy könyv alakjában tették közzé. A készletezési modellek című könyv magyarul az Akadémia Kiadónál, illetve angolul a Kluwer Kiadónál jelent meg; a gazdasági kockázatról írt könyvüket pedig Moszkvában az Ekonomika Kiadó adta ki oroszul; a beruházás gazdaságosság témakörében megjelent könyvük akadémiai díjat kapott, s a PUMA nemzetközi folyóirat Ser. C. Vol. 1. No. 1, 2, 3 számaiban angol nyelven is megjelent. E monográfia jellegű munkáikra azóta számos hivatkozás született, melyek alapján szakmai megítélésük igen pozitívnak ítéltető.

Meszéna György kutatómunkáját a vizsgált gyakorlati területek oldaláról tekintve ki kell emelni azt, hogy 12 évig dolgozott a Posta Vezérigazgatóság operáció-kutatási szakértőjeként, ahol közreműködött egyes részterületek terv-variánsainak, különféle modell elgondolásoknak és előrejelzéseknek a kidolgozásában. Az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézetének megbízásából 14 éven át vezetett egy komplex munkacsoportot, melynek eleinte 3, később 10-12 tagja volt. E csoport keretében 22, a hazai gyakorlatot elemző, fejlesztő alaptanulmány készült, nem számítva a hozzájuk kapcsolódó további publikációkat. Az Országos Vízügyi Hivatal által felvetett kérdések vizsgálata során regionális vízgazdálkodási modellek kidolgozásában, tőkeallokációs problémák megoldásában, nagy volumenű adattömegek feldolgozásában, ökológiai rendszerek vizsgálatában dolgozott. A Nehézipari, később Ipari Minisztérium feladatkitűzése alapján pedig a beruházás-gazdaságosság, a szerkezetváltás és az iparfejlesztés témakörében végezett érdemi kutatásokat. Munkája számos esetben kapcsolódott konkrét vállalati problémákhoz, mely kutatómunka során elért eredményeket több más szerzővel együtt közreadott tanulmányok formájában Magyarországon elsőként publikált a Közgazdasági és Jogi Könyvkiadónál 1967-ben illetve 1969-ben megjelent Döntési Modellek I és II. kötetekben. Társ szerzőkkel, illetve az általa összefogott kutatásokból szerkesztésében megjelent könyvek száma 9, ebből hármat idegen nyelven is kiadtak. Összes publikációi száma 114, melyek közül 16 idegen nyelven jelent meg.

Meszéna György azok közé a kevesek közé tartozik, akik már az 1960-as években felismerték a számítógépek tudományos és gazdasági számításokra történő használatának a jelentőségét. Tanítványait arra ösztönözte, hogy a számítógépeket és az azokon egyre gyorsabban megjelenő, főleg statisztikai és optimalizálási programcsomagokat megismerjék, és a mindennapi munkájukban munkaeszközként alkalmazzák. Ő maga is folyamatosan figyelemmel kísérte a számítógépen realizálható új módszerek megjelenését és azonnal közkinccsé tette azokat. Szép példa erre Füstös Lászlóval és Simonné Mosolygó Nórával közösen, 1997-ben megjelentetett Térsta-

tisztika (Három- és többdimenziós adattömbök elemzési módszerei) című könyve, melyben Magyarországon elsőként hívták fel a figyelmet az adatelemzésnek erre az új, számítógépes módszerére.

Sok előadást tartott külföldi tanulmányutakon, hazai és külföldi konferenciákon, a magyaron kívül német és olasz nyelven. 1992. január 8-tól 5 hónapra keresztül – a Giovanni Agnelli alapítvány ösztöndíját elnyerve – Torinóban volt tanulmányúton. A téma, mely területre vonatkozóan a pályázatát is benyújtotta, a gazdasági szerkezetváltáshoz szorosan kapcsolódó pénzügyi modellek és számítások területe volt. Ezt követően egész mostanáig, a tananyagírástól az oktatáson át a tudományos kutatómunkáig sokat foglalkozott olyan témákkal, melyek sora az alapvető pénzügyi számításoktól a biztosításmatematikán keresztül egészen a „devizaprognózisig” terjed ki.

Meszéna György a Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának 20 éven át volt vezetőségi tagja, 7 évig alelnöke, illetve elnöke. A jogutód Gazdaságmodellezési Társaságnak ugyancsak sok éven át volt az elnöke. A SZIGMA Operációkutatási folyóirat szerkesztőbizottságának kezdettől fogva, az Egyetemi Szemle szerkesztőbizottságának egész fennállása alatt tagja volt. Több éven át szerkesztette a Sienai Egyetemmel közösen indított PUMA (Pure Mathematics and Applications) című nemzetközi folyóirat alkalmazási (C) sorozatát.

Munkájáért 1969-ben az OT elnökétől, 1973-ban a Munkaügyi Minisztertől külön köszönetet, 1972-ben az OT elnökétől tervezési emléklakettet, ugyancsak 1972-ben a Művelődési Minisztériumtól a tudományos diákkörökben végzett kiemelkedő oktató-nevelő munkájáért oklevelet, 1979-ben a Minisztertanácstól Kiváló Munkáért kitüntető jelvényt, 1985-ben az Elnöki Tanácstól a Munka Érdemrend bronz fokozatát kapta. 2000-ben elnyerte a Krekó Béla díjat, 2001-ben Szentgyörgyi Albert díjjal tüntették ki.

Meszéna György publikációs listája

Könyvek

- [1] BÁCSKAI – HUSZTI – MESZÉNA – MIKÓ – SZÉP: *A gazdasági kockázat és mérésének módszerei*, KJK, Bp. 1976. (216 p.)
- [2] Az [1] alatti könyv orosz nyelvű kiadása, *Ekonomika* Moszkva, 1979.
- [3] MESZÉNA GYÖRGY – ZIERMANN MARGIT: *Valószínűségelmélet és matematikai statisztika*, KJK, Bp. 1981. (554 p.)
- [4] ÉLTETŐ ÖDÖN – MESZÉNA GYÖRGY – ZIERMANN MARGIT: *Sztocasztikus módszerek és modellek*, KJK, Bp. 1982. (420 p.)
- [5] BARANCSI ÉVA – BÁNKI GÉZA – BORLÓI RUDOLF – CHIKÁN ATTILA – KELLE PÉTER – KULCSÁR TAMÁS – MESZÉNA GYÖRGY: *Készletezési modellek*, (szerk. Chikán Attila), KIK, Bp. 1983. (539 p.)
- [6] *Sztocasztikus módszerek a döntéselőkészítésben*, (szerk. Meszéna György), Tankönyvkiadó, Bp. 1984. (252 p.)

- [7] *Módszerek a beruházási tevékenység kvantitatív elemzéséhez*, (szerk. Meszéna György), Akadémiai Kiadó, Bp. 1985. (207 p.)
- [8] FÜSTÖS LÁSZLÓ – MESZÉNA GYÖRGY – SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA: *A sokváltozós adat-elemzés statisztikai módszerei*, Akadémiai Kiadó, Bp. 1986. (526 p.)
- [9] *Pénzügyi Számítások*, (szerk. Meszéna György), ECONOMIX Kiadó, Bp. 1989. (131 p.)
- [10] *Operációkutatás II.*, (szerk. dr. Csernyák László), Tankönyvkiadó, Bp. 1990. 4. fejezet: Szimuláció (Meszéna György), (165–208. old.)
- [11] *Inventory Models* by ÉVA BARANCSI, GÉZA BÁNKI, RUDOLF BORLÓ, ATTILA CHIKÁN, PÉTER KELLE, TAMÁS KULCSÁR and GYÖRGY MESZÉNA, (editor: Attila Chikán), Akadémiai Kiadó, Bp. 1990 and Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, (419 p.)
- [12] A (7)-es sorszám alatt szereplő könyv angol fordítása megjelent a P.U.M.A. (Pure Mathematics and Applications) c. nemzetközi folyóirat (Dept. of Math. Univ. of Economics, Budapest and Dept. of Math., Univ. of Siena, Italy), Ser. C, Vol. 1. No. 1,2,3, 1990. számaiban.
- [13] FÜSTÖS LÁSZLÓ – MESZÉNA GYÖRGY – SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA: *Térstatisztika*, AULA Kiadó, Bp. 1997. (246 p.)
- [14] FÜSTÖS LÁSZLÓ, KOVÁCS ERZSÉBET, MESZÉNA GYÖRGY, SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA: *Alakfelismerés*, Új Mandátum Kiadó, Budapest, 2004. (1–644. p.)

További cikkek, tanulmányok időrendben

- [15] *150 éve született Bolyai János*, Néplap Debrecen, 1952. dec. 17.
- [16] *Számítások Bruns sorokkal a természetes vizekben található uránnyomok statisztikai értékeléséhez*, Atomki Közlemények, II. kötet, 2. sz. Debrecen, 1960. (19–107. old.)
- [17] *Matematikai statisztikai vizsgálatok a természetes vizek uránban való feldúsulásának fizikai feltételeiről*, (Scherf Emillel), Atomki Közlemények, II. kötet 2. sz. Debrecen, 1960. (109–143. old.)
- [18] *Szükszavú vagy bőbeszédű-e az ember? Az információelmélet válaszol*, Műszaki Élet, XVI. évf. 8. sz. 1961. ápr. 13.
- [19] *Törvényszerűségek korszerű vizsgálata valószínűségelméleti alapokon*, Ipari és Építőipari Statisztikai Értesítő, XIV. évf. 12. sz. Budapest 1963. dec. (461–463. old.)
- [20] *Gyakorlati problémák megfogalmazásának hathatós eszközei: a valószínűségeloszlások I.*, IPSE, XV. évf., 1–2. sz. Bp. 1964. január-február
- [21] *Gyakorlati problémák megfogalmazásának hathatós eszközei: a valószínűségeloszlások II.*, IPSE XV. évf. 3. sz. Bp. 1964. (106–108. old)
- [22] *Gyakorlati problémák megfogalmazásának hathatós eszközei: a valószínűségeloszlások III.*, IPSE XV. évf. 5. sz. Bp. 1964. május (185–190. old.)
- [23] „Magyar Szakirodalom: Prékopa András – Élető Ödön: Matematikai Statisztika”, Statisztikai Szemle 42. évf. 5. sz. Bp. 1964. május (539–540. old.)
- [24] *A becsléelmélet matematikai statisztikai alapjairól I.*, IPSE XV. évf. 7. sz. 1964. július (267–271. old.)
- [25] *A becsléelmélet matematikai statisztikai alapjairól II.*, IPSE XV. évf. 8. sz. Bp. 1964. aug. (309–311. old.)

- [26] *A hírközlési szükségletek várható alakulása*, (dr. Szőke János – Nemes Sándor – dr. Szőke Lajos társszerzőkkel), KPM IV. Főosztály sokszorosított belső tanulmány, Bp. 1964. (70. old.)
- [27] *A megfigyelések értékelésének befolyása ismereteink pontosságára: hibaszámítás I.*, IPSE XV. évf. 9-10. sz. Bp. 1964. szept.-okt. (379-381. old.)
- [28] *A megfigyelések értékelésének befolyása ismereteink pontosságára: hibaszámítás II.*, IPSE XV. évf. 11. sz. Bp. 1964. nov. (419-421. old.)
- [29] *Feltevés ellenőrzésének matematikai statisztikai eszközei: a próbák*, IPSE XV. évf. 12. sz. Bp. 1964. dec. (460-463. old.)
- [30] *Statisztikai mintavételi eljárások*, IPSE XVI. évf. 2. sz. Bp. 1965. február (86-88. old.)
- [31] *Alapvető matematikai statisztikai vizsgálatok szemléltetése konkrét példa keretei között, I. rész*, IPSE XVI. évf. 4. sz. Bp. 1965. április (165-168. old.)
- [32] *Alapvető matematikai statisztikai vizsgálatok szemléltetése konkrét példa keretei között, II. rész*, IPSE XVI. évf. 6-7. sz. Budapest 1965. június-július (272-275. old.)
- [33] *Egy ágazati szintű matematikai-közgazdasági modellről*, (Megyeri Endrével és Szép Jenővel közösen), Döntési Modellek, KJK, Bp. 1967. (109-129. old.)
- [34] *Matematikai-közgazdasági modellek az ipari készletgazdálkodás céljaira, – tetszőleges számú gyártómű és felhasználó, valamint egy központi raktár esetében*, (Megyeri Endrével és Szép Jenővel közösen), Döntési Modellek, KJK, Bp. 1967. (131-165. old.)
- [35] *Kőolajtermék elosztóhálózat telepítési programjának meghatározása matematikai módszerekkel*, (Bikics Istvánnal és Szép Jenővel közösen), Döntési Modellek, KJK, Bp. 1967. (167-187. old.)
- [36] *Valószínűségeloszlások és idősorok felbontása*, SZIGMA 1. évf. 1. sz. Bp. 1968. (60-75.)
- [37] *Operációkutatási esettanulmányok*, (Gáspár Lászlóval, Szentpéteri Szabolcsnéval, Varga Józseffel közösen), Országos Tervhivatal jegyzet alakban sokszorosított kiadványa, Bp. 1969. jún. (247 p.)
- [38] *Vízellátó rendszerek kiépítésének és fejlesztésének dinamikus tervezési módszere*, (Orlóczy Istvánnal, Szép Jenővel, Varga Józseffel közösen), Vízügyi Szervezés és Számítástechnikai Iroda soksz. kiadványa, 1969. november Bp. (41 p.)
- [39] *Modell beruházások gazdasági hatékonyságának vizsgálatához*, (Halmi Erzsébettel és Szép Jenővel közösen), Döntési Modellek II. KJK, Budapest 1969. (5-31. old.)
- [40] *Matematikai közgazdasági modellen alapuló nomografikus készletgazdálkodási rendszer*, (Szép Jenővel közösen), Döntési Modellek II. KJK, Budapest 1969. (121-153. old.)
- [41] *Matematikai módszerek alkalmazása*, (Krekó Bélával közösen), Felsőfokú Pénzügyi és Számviteli Szakiskola jegyzete, Tankönyvkiadó, Budapest 1969. (265. old. ebből a saját rész: 139-192. old.)
- [42] *Árvízvédelmi öblözetek beruházásainak optimális elosztására vonatkozó dinamikus tervmodell*, (Szép Jenővel és Varga Józseffel közösen), Vízügyi Szervezési és Számítástechnikai Iroda soksz. kiadv. Bp. 1970. (65. old.)
- [43] *Mathematische Methoden in der Operationsforschung c. kötetben: Mathematisch-ökonomische Modelle zur Optimierung der Vorratsbewirtschaftung gewisser Produkte der Metallurgie*, Verlag „Die Wirtschaft“, Berlin 1970. (338 p.) (202-211. old.)
- [44] *Autoregresszió vizsgálata az ágazati kapcsolatok mérlegében*, (Simon Bélánéval közösen), OT TgI közlemények, Bp. 1970. 5. sz. (320 old.)

- [45] Operációkutatási módszerek a vállalati gyakorlatban c. Számítástechnika Oktatási Központ jegyzetében: *A valószínűségszámítás és a matematikai statisztika alapjairól*, Bp. 1970. (33–46. old.)
- [46] *Beruházások gazdaságosságának vizsgálata nomografikus eszközökkel* (Simonics Györgynével közösen), OT TgI közleményei, Bp. 1970. 6. sz. (1–38. old.)
- [47] Operációkutatási esettanulmányok c. kötetben: *Beruházás gazdaságossági számítások nomografikus eszközökkel*, (Simonics Györgynével), Számítástechnikai Oktatási Központ kiadványa, szerk. dr. Csath Magdolna, Budapest 1971. (245–261. old.)
- [48] *Néhány példa a nomografikus számítási módszerek közgazdasági alkalmazására*, Ipargazdaság XXIII. évf. 6. sz. Bp. 1971. júl., (34–390. old.)
- [49] *Matematika 11. (A valószínűségszámítás alkalmazásai)*, Krekó Bélával és Hámori Miklóssal közösen, Ker. és Vendégl. Főisk. tankönyve, KJK, 1971. saját rész: 7–113. old. (A teljes könyv: 362 old.)
- [50] *A Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem Matematika Tanszékének tudományos munkássága*, SZIGMA IV. évf. 1–2. sz. Budapest 1971. (133–134. old.)
- [51] *ÁKM együtthatók előrejelzése autoregresszivitás alkalmazásával*, (Simon Bélánével közösen), SZIGMA IV. évf. 3. sz. Bp. 1971. (153–163. old.)
- [52] P. E. GREEN – D. S. TULLE: *Döntéselőkészítés a marketingben*, 608 oldalas könyv lektorálása, (hazai célokra alkalmassá tétele), 7–13. fejezet esetében (211–493. old.), KJK, 1971.
- [53] *Operációkutatás*, szerk. dr. Csath Magdolna, SZÁMOK rendszerszervezők tankönyve című kötetben: a IV. *Valószínűségszámítás* és az V. *Matematikai statisztika*, Bp. 1972. (199–279. old.)
- [54] *Regressziós függvények megbízhatóságának vizsgálata matematikai statisztikai eszközökkel*, (Simonics Györgynével közösen), OT TgI közleményei, Bp. 1972. (63 old.)
- [55] *Dinamikus módszer a regionális vízellátó rendszerek távlati tervezésére, és a megvalósítás időbeli ütemezése*, (Szép Jenővel és Varga Józseffel közösen), Vízügyi Szervezés és Számítástechnikai Iroda D 10.132 kiadványa (Soksz. Bp. Erdészeti és Műszaki Szervezési Iroda), Bp. 1972. (81 old.)
- [56] *A kockázat mértékének megállapítása beruházási döntéseknél*, (Lóczi Sándornével közösen), OT TgI Bp. 1973. jan. (89 old.)
- [57] *A gazdasági fejlődés tényezőinek vizsgálata faktoranalízis alkalmazásával*, (Simon Bélánével közösen), OT TgI, Bp. 1973. (93 old.)
- [58] *Munkaügyi Esettanulmányok I. és II. kötet*, (Gáspár Lászlóval és Varga Józseffel), Munkaügyi Minisztérium kiadványai: 1. kötet: 123 old., II. kötet: 124 old. Bp. 1973.
- [59] *A multi-stage stochastic inventory model and its application*, *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai: Inventory Control and Water Storage*, Editor A. Prékopa, North-Holland Publishing Company, Amsterdam–London and J. Bolyai Math. Soc. Bp. 1973.
- [60] *Operációkutatási Modellek I.* című jegyzetben (szerk. dr. Gáspár László) *Mezőgazdasági gépjárműsajátosságainak vizsgálata programozási modell keretei között*, Tankönyvkiadó (J 10-469) a modell: 13–19. old., a megoldás: 75–82. old. Bp. 1974.
- [61] *Beruházás gazdaságossági vizsgálatok statisztikai segédeszközökkel*, (Horvai Ervin, Matits Ágnes, Mikó Gyula, Simon Béláné, Simonics Györgyné társszerzőkkel), OT TgI Budapest 1974. jan. (77 old.)
- [62] *A vízgazdálkodási ágazat és az OVH Vízgazdálkodási Tröszt hosszútávú terümodelleje*, (Szép Jenővel és Varga Józseffel), VSZSZI-MKKE Mat. Tanszék Budapest 1973. (87 old.) soksz. 140 péld.

- [63] *A vállalati önállóság és a trösztí szervezeti kapcsolata; – a kvalitatív és kvantitatív elemzés módszertana* (zárójelentés) (Husztly Ernő, Lábán József, Lengyel László, Mikó Gyula, Szép Jenő társszerzőkkel), NIM Közg. Főoszt. – MKKE Mat. Tanszék Bp. 1973. dec. soksz. 30 pl.
- [64] *Javaslat a Regionális ágazati kapcsolati mérlegrendszerben az egyes mérlegek szerkezetére, összekapcsolódásuk módjára és az adatforrásokra*, Csepinszky A. – Kovács T. – Kiss F. – Mikó Gy. – Racsmány A. – Szép J. társszerzőkkel), ÉVM-KSH Mat. T. Bp. 1974. (121 old.)
- [65] *Operációkutatási Modellek II.* (Makro szintű optimumszámítási modellek), szerk. dr. Gáspár László c. jegyzet kötetben: *Trösztökbe tömörült vállalatok kapcsolatának vizsgálata matematikai modellekkel*, (Mikó Gyulával közösen), Tankönyvkiadó, Bp. 1975. J10-1316. (A modell: 32–40. old. a megoldás: 151–198. old.)
- [66] *A gazdasági kockázat mérése*, Biztosítási Szemle XXI. évf. 8–9. sz. augusztus–szeptember Bp. 1975. (323–325. old.)
- [67] *Módszertani javaslatok a beruházási tevékenység komplex gazdasági tervezése-elemzése tovább-fejlesztéséhez*, (Forgó Ferenc, Matits Ágnes, Mikó Gyula, Neményi István, Szép Jenő társszerzőkkel), NIM-MKKE Mat. Tanszék soksz. tanulmány Bp. 1975. szept. (1–253. old.)
- [68] *Vizsgálatok és javaslatok a beruházási tevékenység jellemzéséhez*, OT TgI, 3255 (TgI) 1975. (26 old.)
- [69] S. GANCZER – GY. MESZÉNA – GY. MIKÓ: *Price Systems Based on Efficiency*, Department of Mathematics Karl Marx University of Economics, Bp. 1976–7. (19 p.)
- [70] GYÖRGY MESZÉNA – MRS. NÓRA SIMON: *Auto-regressivity analysis in the input-output table*, megjelent az alábbi kötetben: *Input-Output Techniques*, Proceedings of the Second Hungarian Conference on Input Output Techniques, Akadémiai Kiadó, Bp. 1976. (313–319. old.)
- [71] *Az átfutási idő eltolódásának hatása a beruházásgazdaságossági mutatókra*, (Mikó Gyulával közösen), SZIGMA IX. évf. 1–2. sz. (1–110. old.)
- [72] *Beruházási javaslatok csoportosítása a döntéselőkészítés folyamatában*, (Simonné Mosolygó Nórával) 579/TgI/1977 Bp. 1977. jan. (43 old.)
- [73] *Árvízvédelmi fejlesztési beruházások optimális elosztásának dinamikus tervezése*, Vízügyi Közlemények 1977. év 1. füzet: 7–24. old. Lapkiadó.
- [74] *A tervezés színvonalának mérése az egyedi nagyberuházásokra vonatkozó gyakorlati alkalmazásokkal*, (a tanulmányt írta: Török Sándorné, Matits Ágnes, közreműködött: Simek Tibor, Meszéna György)
- [75] *Beruházáshatékonysági mutatók kapcsolatának statisztikai elemzése*, (Bertáné Forgács Anna, Mikó Gyula társszerzőkkel), Ipargazdaság XXIX. évfolyam 5. szám 1977. május (40–42. old.)
- [76] *A várható beruházási költség előrejelzése, a beruházás számítógépre szervezett, komplex információ rendszerének felhasználásával*, (Chikán Attila, Csatlós Ferenc, Török Sándorné társszerzőkkel), Bp. 1977. dec. NIM Távlati Tervezési Főoszt. – MKKE Mat. Tanszék soksz. tan. (1–109. old.)
- [77] *Cluster analízis: fogalmak és módszerek*, (Füstös Lászlóval és Simonné Mosolygó Nórával), SZIGMA 1977. X. évf. 3. sz. (111–149. old.)
- [78] *Beruházási javaslatok csoportosítása, rangsorolása*, (Füstös Lászlóval és Simonné Mosolygó Nórával), SZIGMA 1977. X. évf. 3. sz.
- [79] *A hatótényezők súlyozásának vizsgálata szeparálással*, (Getherné Simon Erzsébettel és Simonné Mosolygó Nórával), VII. Magyar Operációkutatási Konferencia kötete, Pécs 1977. okt. 11–14.

- [80] 15 éves a Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztálya, SZIGMA, 1977. X. évf. 1-2. sz. (105-106. old.)
- [81] Sokváltozós statisztikai rendszerek alkalmazása a társadalmi-gazdasági fejlődéssel összhangban álló vízigények előrejelzésére, (Oszoli Istvánnal és Ress Sándorral), Tájékoztató a Vízgazdálkodási Intézet 1977. évi munkájáról c. kötetben (264-281. old.) A Vízgazdálkodási Intézet kiadványa Bp. 1978. (Példányszám: 500, terjedelem: 478 old.)
- [82] Trösztökbe tömörült vállalatok kapcsolatának vizsgálata matematikai modellekkel, (Mikó Gyulával), Döntéselőkészítés programozással (szerk. dr. Gáspár László) című kötetben, Tankönyvkiadó Bp. 1980. (206-240. old.)
- [83] GY. MESZÉNA – M. MÉSZÁROS: *Use of statistical methods of pattern recognizing in the differential diagnostics of neurotic diseases*, Selected Papers on Mathematics; Department of Mathematics Karl Marx University of Economics, Bp. 1980. január.
- [84] Hatótényezők súlyozásának vizsgálata szeparálással, (Getherné Simon Erzsébettel és Simonné Mosolygó Nórával), Válogatott Tanulmányok c. kötetben, MKT Matematikai Közg. Szakoszt. kiadványa, Bp. 1980. A kötet 472 old. (171-184. old.)
- [85] Műszaki és műszaki-biztonsági előírások egységes elbírálásának kvantitatív módszerei, (Zárójelentés) (Forgó Ferencsel, Mikó Gyulával és Szentpéteri Szabolcsnéval közösen), NIM Műszaki Fejl. Főoszt., MKKE MSZI Bp. 1980. (1-328. old.)
- [86] A csoportosítás, a rangsorolás módszereinek alkalmazási lehetőségei, Gépgyártástechnológia, 1981. 3-4. sz. (170-175. old.)
- [87] Készletmodellek elemzése, (társszerzőkkel), Készletek a népgazdaságban és a vállalati gazdálkodásban c. kötetben, szerk. Barancsi Éva és Chikán Attila, az MTA Szoc. V. kutatási Főirány kiadványa (313-316. old.)
- [88] *Analysis of a system of inventory models*, (társszerzőkkel), The Economics and Management of Inventories Part A. (362 p.), Part B. (632 p.) című két kötetes könyvben (297-308. p.), Akadémiai Kiadó Bp. 1981.
- [89] L. FÜSTÖS – GY. MESZÉNA – N. MOSOLYGÓ, SIMON: *Cluster analysis*, Acta Oeconomica, Vol. 26(3-4), (pp. 291-334.) (1981)
- [90] A költségvetési elemek rövidtávú előrejelzésének lehetőségei a mikroökonómiai összefüggések alapján, (Sulyok Papp Mártával, Temesi Józseffel, Törökné Matis Ágnessel közösen), PMSZK-MKKE MSZI zárójelentés, Budapest 1982. márc. (255 old.)
- [91] Szakértői konferencia sorozat Salgótarjánban, SZIGMA 1982. XV. évf. 1-2. sz. (125-128. old.)
- [92] A sokdimenziós skálázás egyes újabb módszerei I., (Füstös Lászlóval és Simonné Mosolygó Nórával), SZIGMA 1982. XV. évf. 3. sz. (193-213. old.)
- [93] A Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem Matematikai és Számítástudományi Intézetének munkássága, SZIGMA 1982. XV. évf. 3. sz. (229-232. old.)
- [94] É. BARANCSI – G. RÁNKI – R. BORLÓI – A. CHIKÁN – P. KELLE – T. KULCSÁR AND GY. MESZÉNA: *A Report of Research on Inventory Models*, Engineering Costs and Production Economics; Elsevier Scientific Publishing Company 7(1983) (127-136. p.), Amsterdam, Printed in The Netherlands
- [95] Bevezetés az adatelemzés sokváltozós módszereibe, (Füstös Lászlóval és Simonné Mosolygó Nórával), Tankönyvkiadó (J 10-1634) Bp. 1983/1
- [96] A sokdimenziós skálázás egyes újabb módszerei II. (Füstös Lászlóval és Simonné Mosolygó Nórával), SZIGMA 1983. XVI. évf. 3. sz. (209-233. old.)

- [97] *Készletgazdálkodási rendszerek összehasonlítása*, (Chikán Attilával és Kelle Péterrel), Új eredmények a készletezés kutatásban c. Szoc. Kutatási Főirány és a Nemzetközi Készletezési Tud. T. kiadványa, (1–415. old.) Bp. 1983. dec. (317–336. old.) (szerk. Chikán Attila és Psenák Angéla).
- [98] *A Hajdúhátsági többcélú vízgazdálkodási rendszer kiépítési mértékének kockázati elemzése*, (Mikó Gyulával közösen), Sztochasztikus módszerek a döntéselőkészítésben, szerk. Meszéna György, c. kötetben, Tankönyvkiadó Bp. 1984. (31–65. old.)
- [99] *Műszaki és műszaki-biztonsági előírások, szabványok összehasonlítása, rangsorolása*, (Füstös Lászlóval, Simonné Mosolygó Nórával), A Sztochasztikus módszerek a döntéselőkészítésben c. kötetben, szerk. Meszéna György, Tankönyvkiadó Bp. 1984. (151–173. old.)
- [100] *A vállalati tevékenység értékelése különböző sokváltozós módszerek együttes alkalmazásával*, Sztochasztikus módszerek a döntéselőkészítésben c. kötetben, szerk. Meszéna Gy., Tankönyvkiadó Bp. 1984. (173–187. old.)
- [101] *Árvízvédelmi fejlesztési beruházások optimális elosztásának dinamikus tervezése*, Sztochasztikus módszerek a döntéselőkészítésben c. kötetben, szerk. Meszéna Gy. Tankönyvkiadó Bp. 1984. (201–219. old.)
- [102] *Platz der Faktoranalyse in System der multivariaten statistischen Verfahren; Faktoranalyse*, (Beiträge zum Anwenderseminar Jena) Altenberga von 23. bis 27. Januar 1984 c. kötetben, Wissenschaftliche Beiträge der Friedrich Schiller Universität Jena 1984. (28–40. p.)
- [103] GY. MESZÉNA: *System analysis using multivariate statistical method*, Conference on Automata, Languages and Mathematical Systems (284 p.) Held in Salgótarján, Hungary, May 21–23, 1984. Edited by I. Peák and J. Szép; Department of Math. Karl Marx University of Economics c. kötetben Bp. 1984–2. (157–168. p.)
- [104] *Kockázat és biztosítás*, (dr. Ébli Györgynével közösen), Tankönyvkiadó, (J 10-1713) Bp. 1986. (241 old.)
- [105] *Környezeti hatástanulmányba szervesen illeszkedő kockázat-elemzés megvalósítása*, (Mikó Gyula, Ress Sándor, Simonné Mosolygó Nóra, Szép Jenő társszerzőkkel), Országos Környezet és Természetvédelmi Hivatal, Economix Kiszövetkezet, Bp. 1986. nov. (60 old.)
- [106] *A sokdimenziós skálázás egyes újabb módszerei III.*, (Füstös Lászlóval és Simonné Mosolygó Nórával), SZIGMA 1986. XIX. évf. 1–2. sz. (125–135. old.)
- [107] *LISREL – Das allgemeine lineare Modell von Strukturgleichungen*, Faktoranalyse c. kötetben; Beiträge zum 2. Anwenderseminar in Jena vom 13. bis 17. Januar 1987. (Füstös Lászlóval, Ress Sándorral, Simonné Mosolygó Nórával) Jena 1987. (33–701. p.)
- [108] GY. MESZÉNA – GY. MIKÓ – N. SIMONNÉ MOSOLOYGÓ – J. STÁHL – J. TEMESI: *Complex Economic Analysis of a Dam Construction Project*, Papers on applications I. c. kötetben: Department of Math. Karl Marx Univ. of Economics Bp. 1987–1. (27–65. p.)
- [109] GY. MESZÉNA – GY. MIKÓ – J. STÁHL – J. TEMESI: *Solution of a Warehouse Control Problem*, Papers on applications I. c. kötetben: Department of Math. Karl Marx Univ. of Economics Bp. 1987–1. (79–95. p.)
- [110] *Strukturális kapcsolatok általános lineáris modellje (LISREL)*, (Füstös Lászlóval, Ress Sándorral, Simonné Mosolygó Nórával), SZIGMA 1987–88. XX. évf. 1. sz. (43–65. old.)
- [111] *A „Termékek összehasonlító minőségvizsgálata” című pályázat tapasztalatai*, (Bakonyi Árpáddal, Tusnádi Gáborral), Minőség és Megbízhatóság c. folyóiratban: XXII. évf. 1988/6 (41–50. old.)
- [112] MESZÉNA GYÖRGY – SZÉP JENŐNÉ: *Matematikai alapismeretek I.*, Budapest 1994. BKE Posztgraduális Kar jegyzet (1–220. old.)
- [113] MESZÉNA GYÖRGY – SZÉP JENŐNÉ: *Matematikai alapismeretek II.*, Budapest 1994. BKE Posztgraduális Kar jegyzet (1–224. old.)

- [114] FÜSTÖS LÁSZLÓ – MESZÉNA GYÖRGY – SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA: *Nyugdíjrendszerek, nyugdíjbiztosítás, kvantitatív megfontolások és a hazai problémák tükrében*, Pénzügyi és Biztosítási Esettanulmányok, szerk. Meszéna György, Bp. 1995. (1–225. old.) BKE jegyzet (18–44. old.)
- [115] ARMAI ZSOLT – MESZÉNA GYÖRGY: *Bank „termék miz”-ének meghatározása*, Pénzügyi és Biztosítási Esettanulmányok, szerk. Meszéna György, Bp. 1995. (1–235. old.), BKE jegyzet (45–75. old.)
- [116] MESZÉNA GYÖRGY – SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA: *Hazai, pénzügyi és Biztosítási Esettanulmányok*, szerk. Meszéna György, Bp. 1995. (1–235. old.), BKE jegyzet (135–174. old.)
- [117] MESZÉNA GYÖRGY – SZÉP JENŐ: *Matematikai és operációkutatási alapismeretek*, BKE Gazdálkodási Kar jegyzete, Bp, 1995. (280 old.)
- [118] MESZÉNA GYÖRGY – SZÉP JENŐ: *Banki működést szimuláló és analízáló modell*, Pénzügyi és Biztosítási Esettanulmányok II., szerk. Meszéna György, Bp. 1996. (1–197. old.), kötetben (1–16. p.)
- [119] FÜSTÖS LÁSZLÓ – MESZÉNA GYÖRGY – SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA: *Bootstrap becslési módszerek*, Vállalati versenyképesség, logisztika, készletek című kötetben, Budapest, 2004. (187–215. old.)
- [120] MESZÉNA GYÖRGY: *Hogyan születtek a „Készletezési modellek” és az „Inventory Models” című könyvek?* Vállalati versenyképesség, logisztika, készletek című kötetben, Bp. 2004. (286–290. old.)

SZÁNTAI TAMÁS

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

MATEMATIKA INTÉZET, DIFFERENCIÁLEGYENLETEK TANSZÉK

1111 BUDAPEST, MŰEGYETEM RKP. 3.

szantai@math.bme.hu

THE WORK OF GYÖRGY MESZÉNA

TAMÁS SZÁNTAI

This paper gives a survey of the research and educational activity of Prof. György Meszéna on the occasion that he is honoured by the Egervár plaque.

ÚJABB STATISZTIKAI VIZSGÁLATOK
AZ ORNSTEIN-UHLENBECK FOLYAMATRÓL
II. SZIMULÁCIÓ

PEGYVERNEKI SÁNDOR

A dolgozatban a stacionárius Gauss-Markov(Ornstein-Uhlenbeck) folyamat paramétereinek együttes vizsgálatával foglalkozom. Ezen folyamat esetén számos probléma adódik a maximum-likelihood becslések eloszlásának vizsgálatával és a paraméterekre adandó konfidenciaintervallumok meghatározásával, ha a csillapítási tényező tart nullához. A cikk célja annak bemutatása, hogy a „közel nemstacionárius” esetben a csillapítási tényezőre adott konfidencia-intervallum baloldali végpontja pozitív valószínűséggel a nulla.

1. Bevezetés

A dolgozatban a

$$d\xi(t) = -\lambda\xi(t)dt + \sigma_w dw(t), \quad (E(\xi(t)) = E(w(t)) = 0)$$

sztochasztikus differenciálegyenlet szimulációs vizsgálatával foglalkozom, ahol $\lambda > 0$ és $\sigma_w > 0$. Továbbá a $\xi(t_0)$ normális eloszlású és független a $w(t)$ standard Wiener-folyamattól, ha $t > t_0$. Ezek a vizsgálatok a [7] cikkben leírt háttérre támaszkodnak, azt fejlesztem tovább. Ezenkívül az eredményeket szimuláció alkalmazásával is szemléletessé teszem.

Ezen dolgozat a [7] (I. rész) közvetlen folytatása és felépítése a következő: A szimuláció leírása. A maximum-likelihood becslések meghatározására megadott numerikus módszerek összehasonlítása. A közelítő modell esetén alkalmazott robusztus technika rövid leírása. A szimulációs eredmények összefoglalása, a tapasztalatok leírása, és annak bemutatása, hogy a „közel nemstacionárius” esetben a csillapítási tényezőre adott konfidencia-intervallum baloldali végpontja pozitív valószínűséggel a nulla.

A szimulációkban keletkezett adatokból, becslési eredményekből összesítő táblázatokat és grafikonokat készítettem, amelyek segítségével jobban látható a „közel

nemstacionárius” eset, illetve az összes paraméter együttes becslésének különlegessége. Először felhívom a figyelmet néhány egyszerű tényre a $\kappa \rightarrow 0$ esetben. Ezenkívül leírom azokat a jelöléseket, amelyek előfordulnak a táblázatokban és ábrákban. Bemutatom a lényeges különbséget az ismert és ismeretlen várható érték (az m paraméter) eset között. Jól látható, hogy miért ad jó közelítést a λ_{01} becslés $\lambda \rightarrow 0$ esetén, ha m ismert, és milyen problémák adódnak, ha m ismeretlen.

2. A szimuláció

A

$$t = t'T, \quad \xi = \xi' \sigma_w \sqrt{T}$$

leképezéssel az általános feladatot a $T = 1$ és $\sigma_w = 1$ esetre vezethetjük vissza, amikor is $\lambda' = \lambda T = \kappa$, azaz az időegység megválasztásától függetlenül ismert m esetén a folyamat realizációi egyetlen paraméterrel, a κ -val vannak jellemezve.

Ez a transzformáció a vizsgálatainkat lényegesen nem befolyásolja, hiszen a maximum-likelihood becslés meghatározásakor ([7]-ben (14)) a λ meghatározása esetén az m is adódik ([7]-ben (13)). Így vizsgálatainkat szimuláció során a λ becsléseinek meghatározására összpontosítjuk. Mivel a [7]-beli (14) egyenletben csak az m paramétertől független statisztikák fordulnak elő, ezért az egyszerűség kedvéért legyen $m = 0$ a szimuláció során. A vizsgálatok során az m értékét ismeretlennek tekintjük.

Legyen n a $[0, 1]$ intervallum beosztásainak a száma, és vezessük be a következő jelöléseket:

$$\xi \left(\frac{i}{n} \right) = \xi_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

$$\rho = e^{-\frac{\lambda}{n}}, \quad \sigma^2 = \frac{1 - \rho^2}{2\lambda}.$$

Ekkor a szimuláció algoritmus:

$$u = \Phi^{-1}(\text{random}), \quad \xi_0 = \frac{u}{\sqrt{2\lambda}},$$

$$\xi_{i+1} = \rho \xi_i + \sigma \Phi^{-1}(\text{random}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

ahol a Φ^{-1} a standard normális eloszlásfüggvény inverzét jelöli, és a *random* függvény egy pszeudovéletlen számokat előállító generátor a $[0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlásra.

A maximum-likelihood egyenletekben megjelenő statisztikák szimulációs megfelelői a következők:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{\xi_0 + \xi_n}{2}, \\ m_2 &= \frac{\sum_{k=0}^n \xi_k}{n+1}, \\ s_1^2 &= \frac{(\xi_n - \xi_0)^2}{4}, \\ s_2^2 &= \frac{\sum_{k=0}^n (\xi_k - m_2)^2}{n+1}, \\ s_{01}^2 &= \frac{\xi_0^2 + \xi_n^2}{2}. \end{aligned}$$

A szakirodalomban a maximum-likelihood becsléseken kívül a következő becsléseket szokás vizsgálni:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{0,5}{s_1^2}, \\ \lambda_2 &= \frac{0,5}{s_2^2}, \\ \lambda_{01} &= \frac{0,5}{s_{01}^2}. \end{aligned}$$

Megjegyzés. Ha egy jelölésben megjelenik a 0, akkor feltételezzük, hogy az m paraméter ismert, egyébként ismeretlen.

3. A numerikus megoldási módszerek összehasonlítása

A [7] cikkben a (11-12) egyenletrendszer megoldására javasoltuk a Newton-módszert, illetve az ún. „gyökös” módszert. A következő három táblázatban összefoglaltuk a két módszert jellemző – az iterációk számára és a végrehajtás idejére vonatkozó – adatokat. A táblázatokban 100 darab gyökmeghatározás átlagos adatai szerepelnek. Az iterációk leállítása 10^{-3} , 10^{-6} , illetve 10^{-9} hibakorlátnál történt. Az idő meghatározásához az algoritmusokat 10^5 alkalommal hajtottuk végre, így az idő mértékegysége 10^{-5} mp. Rövidítések: Gy.it.szám – a gyökös módszer átlagos iteráció száma, Gy.idő – a gyökös módszer átlagos ideje, N.it.szám – a Newton-módszer átlagos iteráció száma, N.idő – a Newton-módszer átlagos ideje.

A 3.4. táblázat azt mutatja, hogy $\lambda = 1$ esetén hogyan változnak az előbbi táblázatok mutatói, ha a minta nagysága változik. Jól látható, hogy nem lenne érdemes a vizsgálatainkat nagy mintaelemszámra elvégezni, hiszen az átlagos mutatók nagyságrendje nem változik.

Megjegyzés. A két módszer által adott gyökök eltérése mindig kisebb volt a hibakorlát felénél, így erre vonatkozóan nincs adat a táblázatokban. Miután a szimulációs eredmények azt mutatják, hogy a számítógépes implementációm esetén az ún. „gyökös” módszer gyorsabb, így a vizsgálatokban ezt használtam.

3.1. táblázat. A hibakorlát 10^{-3} .

λ	Gy.it.szám	Gy.idő	N.it.szám	N.idő
0,000000001	3,40	0,405	9,04	1,335
0,000010000	3,64	0,435	6,85	1,162
0,010000000	3,38	0,406	8,21	1,271
0,100000000	3,36	0,404	8,41	1,284
0,500000000	3,35	0,407	8,50	1,287
1,000000000	3,26	0,401	8,60	1,293
2,000000000	3,42	0,416	9,04	1,328
5,000000000	3,15	0,385	10,81	1,459
10,000000000	2,84	0,346	12,10	1,559
50,000000000	2,23	0,280	13,00	1,625
100,000000000	2,01	0,257	13,00	1,626
500,000000000	2,00	0,258	13,00	1,626
1000,000000000	2,00	0,260	13,00	1,625

3.2. táblázat. A hibakorlát 10^{-6} .

λ	Gy.it.szám	Gy.idő	N.it.szám	N.idő
0,000000001	4,55	0,525	10,74	1,461
0,000010000	5,64	0,648	7,64	1,219
0,010000000	4,95	0,575	9,13	1,337
0,100000000	5,05	0,588	9,39	1,355
0,500000000	5,05	0,588	9,16	1,337
1,000000000	4,78	0,558	9,55	1,370
2,000000000	5,16	0,603	9,90	1,396
5,000000000	4,80	0,563	11,66	1,525
10,000000000	4,01	0,479	13,06	1,627
50,000000000	3,26	0,396	13,59	1,672
100,000000000	2,97	0,363	14,00	1,699
500,000000000	2,85	0,350	14,00	1,700
1000,000000000	2,65	0,324	14,00	1,700

3.3. táblázat. A hibakorlát 10^{-9} .

λ	Gy.it.szám	Gy.idő	N.it.szám	N.idő
0,000000001	5,86	0,670	11,37	1,511
0,000010000	7,69	0,872	8,15	1,261
0,010000000	6,83	0,778	9,50	1,363
0,100000000	6,47	0,742	10,16	1,410
0,500000000	6,84	0,786	9,93	1,396
1,000000000	6,57	0,752	10,62	1,448
2,000000000	7,12	0,815	10,64	1,447
5,000000000	6,21	0,719	12,28	1,571
10,000000000	5,34	0,624	13,69	1,676
50,000000000	4,02	0,478	14,00	1,699
100,000000000	3,61	0,434	14,00	1,701
500,000000000	3,12	0,380	14,00	1,699
1000,000000000	3,00	0,367	14,00	1,698

3.4. táblázat.

Mintaszám	Gy.it.szám	Gy.idő	N.it.szám	N.idő
10	6,60	0,754	9,30	1,350
50	6,48	0,742	9,78	1,382
100	6,57	0,752	10,62	1,448
500	6,69	0,765	9,83	1,390
1000	6,75	0,774	10,07	1,406
5000	6,90	0,789	10,02	1,403

4. A modelleloszlás szerinti robusztus becslések

Ebben a szakaszban a témában elért eredményeimet foglaltam össze (l.[6]). Megadom az általam modelleloszlás szerinti robusztus becslésnek nevezett módszert és annak tulajdonságait.

Legyen adott egy $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ véletlen minta, amelynek elemei függetlenek, azonos eloszlásúak F eloszlásfüggvénnyel. Ezenkívül tudjuk, hogy a mintaelemek eloszlása az F_0 eloszlásfüggvénnyel reprezentált eloszlástípusba tartozik.

A feladat az, hogy a mintából megbecsüljük a μ, σ értékeket úgy, hogy az

$$F_0\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = F(x)$$

egyenlőség teljesüljön.

Legyen a hely- és a skálaparaméterre felírt egyenletrendszer a következő:

$$\sum_{i=1}^n \left(F_0\left(\frac{\xi_i - \mu}{\sigma}\right) - \frac{1}{2} \right) = 0, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\left(F_0\left(\frac{\xi_i - \mu}{\sigma}\right) - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{12} \right) = 0. \quad (2)$$

Tehát $\psi(x) = F_0(x) - 0,5$, és $\chi(x) = \psi^2(x) - \frac{1}{12}$. A jelölés a robusztus statisztikában szokásos (l. [9], [10], [12]).

4.1. Definíció. A (4.1-2) egyenletrendszer létező megoldását (jelölje azt T_n és s_n) a hely-, illetve skálaparaméter modelleloszlás szerinti becslésének (röviden (PT)-becslés) nevezzük.

4.1. ÁLLÍTÁS. Ha az F_0 eloszlásfüggvény differenciálható, szigorúan monoton növekvő és $F_0(0) = 0,5$, akkor a (4.1-2) egyenletrendszer megoldása egyértelműen létezik úgy, hogy $s_n > 0$. Továbbá, a (PT)-becslés B-, V- és kvalitatív robusztus, amelyre a katasztrófa pontok

$$\varepsilon^*(T_n) = \frac{\delta}{1 + \delta} = 0,5, \quad \text{ahol} \quad \delta = \min \left\{ -\frac{\psi(-\infty)}{\psi(+\infty)}, -\frac{\psi(+\infty)}{\psi(-\infty)} \right\}$$

és

$$\varepsilon^*(s_n) = \frac{-\chi(0)}{\chi(-\infty) - \chi(0)} = \frac{1}{3}.$$

Ezenkívül (T_n, s_n) együttes eloszlása aszimptotikusan normális, azaz

$$\sqrt{n}((T_n, s_n) - (\mu, \sigma)) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma),$$

ahol a kovariancia mátrix $\Sigma = C^{-1}S[C^{-1}]^T$.

$$C = \begin{pmatrix} E\left(\frac{\partial}{\partial \mu} \psi\left(\frac{\xi - \mu}{\sigma}\right)\right) & E\left(\frac{\partial}{\partial \sigma} \psi\left(\frac{\xi - \mu}{\sigma}\right)\right) \\ E\left(\frac{\partial}{\partial \mu} \chi\left(\frac{\xi - \mu}{\sigma}\right)\right) & E\left(\frac{\partial}{\partial \sigma} \chi\left(\frac{\xi - \mu}{\sigma}\right)\right) \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} E(\psi^2(\eta)) & E(\psi(\eta)\chi(\eta)) \\ E(\psi(\eta)\chi(\eta)) & E(\chi^2(\eta)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{180} \end{pmatrix}$$

ahol az η F_0 eloszlásfüggvényű.

Az állítás bizonyítását Huber [10] alapján készítettem.

A robusztus becslések többségét a szimmetrikus esetekre (a feltételezett sűrűségfüggvény szimmetrikus a helyparaméterre), illetve a normális eloszlás közelségére dolgozták ki. Az általam megadott módszer minden olyan esetben jól alkalmazható egy eloszlástípus hely- és skálaparaméterének meghatározására, amikor az eloszlástípus reprezentálható szigorúan monoton eloszlásfüggvénnyel, illetve jól megközelíthető ilyennel. A [6] cikkben számos alkalmazás mellett az egyenletrendszer megoldásához szükséges algoritmust is megadtam. Ezt használtam a szimulációk során a (PT)-becslések, illetve a nemcentrális χ_1^2 -eloszlás paramétereinek maximum-likelihood becslésének a meghatározására is.

5. Aszimptotika, jelölések, táblázatok, konfidencia-intervallum

A szimuláció segítségével a következő kérdésköröket próbáljuk megvizsgálni.

1. Ismert m várható érték esetén a λ maximum-likelihood becslése, mely paramétertartományban lesz közel χ_1^2 -, illetve normális eloszlású; és mikor kell használnunk az ún. egzakt eloszlásfüggvény táblázatokat (l. Arató, Benczúr [2], [3], Arató, Kuki, Szabó [4])? Továbbá, a maximum-likelihood becslés helyett mikor használható egyszerűbben meghatározható becslés?
2. Ha mind az m , mind a λ paraméter ismeretlen, akkor mit tudunk mondani az elégséges statisztikák, a maximum-likelihood becslések és a hozzájuk kötődő néhány – a szakirodalomban előforduló – egyszerű becslésről, különös tekintettel arra az esetre, amikor $\lambda \rightarrow 0$.
3. Az előző kérdéskörhöz kapcsolódik az a probléma, hogy mit tudunk mondani a paraméterekre felírt konfidencia-intervallumokról. Hogyan lehet érzékeltetni a $\lambda \rightarrow 0$ eset különlegességét, ha mind a három paraméter ismeretlen?

Az eddigi elméleti eredmények és szimulációs vizsgálatok alapján ismert, hogy még egyparaméteres esetben is vagy az aszimptotikus eloszlást ismerjük, vagy megfelelő számítógépes háttérrel megtudjuk adni az egzakt eloszlás közelítését. Továbbá néhány esetben az átlag, illetve a tapasztalati szórásnégyzet nem használható, mert nem létezik a várható érték. Ez indokolja, hogy a klasszikus módszerek (átlag, szórásnégyzet, maximum-likelihood becslés, kvantilis becslések) mellett más módszereket is alkalmazzunk, amelyek kevésbé érzékenyek az ún. kiugró értékekre, illetve arra, hogy a feltételezett modell csak közelíti a ténylegest. Ezért felhasználjuk a 4. szakaszban ismertetett (PT)-becsléseket. Előnye, hogy robusztus, a vizsgált esetekben egyértelműen léteznek a becslések, s a megadott algoritmussal rögtön meg is határozhatók. Jól kezeli a nemcentrális χ_1^2 -eloszlás paramétereinek a meghatározását. Sőt a maximum-likelihood becslés is könnyen meghatározható

a (PT)-becslésekhez megadott numerikus algoritmussal. A módszer stabilitásán kívül az is fontos volt, hogy a számolási és kerekítési hibákra kevésbé érzékeny. Ez különösen fontos az aszimptotikus esetben.

A szimuláció során tapasztaltak leírásához, illetve az elkészített táblázatok megértéséhez szükség van a következő jelölések, illetve jelölési alapelvek ismertetésére.

$\bar{\vartheta}$ – a ϑ statisztika átlaga.

σ_{ϑ}^* – a ϑ statisztika korrigált tapasztalati szórása.

$\hat{\mu}_{\vartheta}(F)$ – a ϑ statisztikára vonatkozó helyparaméter maximum-likelihood becslése, ha a feltételezett eloszlástípus F .

$\hat{\sigma}_{\vartheta}(F)$ – a ϑ statisztikára vonatkozó skálaparaméter maximum-likelihood becslése, ha a feltételezett eloszlástípus F .

$T_{\vartheta}(F)$ – a ϑ statisztikára vonatkozó helyparaméter (PT)-becslése, ha a feltételezett eloszlástípus F .

$s_{\vartheta}(F)$ – a ϑ statisztikára vonatkozó skálaparaméter (PT)-becslése, ha a feltételezett eloszlástípus F .

Φ – a standard normális eloszlásfüggvény.

χ_1 – a χ_1^2 eloszlásfüggvény.

χ'_1 – a nemcentrális χ_1^2 eloszlásfüggvény.

A táblázatokban lévő eredmények csak egy kis szeletét mutatják meg az összes szimulációnak, és csak néhány szempont szerinti kigyűjtést jelenítettem meg.

A táblázatok rövid leírása:

Az 5.1–4. táblázatok a λ maximum-likelihood becslésének, a λ_1 , a λ_2 és a λ_{01} statisztikák eloszlásának a kvantilisbecsléseit tartalmazzák különböző λ paraméter értékeket feltételezve. A táblázatokban

$$P(\vartheta < z_{\lambda,p}) = p$$

értékek becslése található. A szimuláció során a $[0, 1]$ intervallum beosztásainak száma $n = 100$. Ezután 1000 elemű rendezett minta készül a kvantilis becslésére, majd mindez 100-szor megismétlődik, s ezek átlaga adja a táblázatokban szereplő számokat. A hibakorlát pedig $\varepsilon = 10^{-10}$.

Megjegyzés. Ha a beosztások számát és az egyes kvantilisekre vonatkozó mintaelemszámot növeltem, akkor a tendenciák nem változtak, viszont gyorsan nőtt a futási idő.

Az 5.6–12. táblázatok az m , m_1 , m_2 , λ , λ_1 , λ_2 és λ_{01} paraméterek becsléseinek, illetve statisztikák eloszlásának megfelelő paraméterek becslésének összegzését

tartalmazzák a fenti jelöléseket követve. Ezen táblázatok készítésekor a beosztások száma $n = 1000$, a mintaelemek száma szintén 1000 és a hibakorlát 10^{-10} .

A statisztikák eloszlásának leírását, illetve a megfelelő paraméterbecslések jellemzését kezdjük az egyszerűbb esetekkel.

Az 5.7. táblázat alapján is ugyanaz látható, mint amit az elméletből tudunk, hogy kis λ esetén az m paraméter becsléseinek szórásnégyzete tart $+\infty$ -hez. Viszont a ([7], 55. oldal) sorfejtésből jól látható, hogy

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} E((m_1 - m_2)^2) = \frac{1}{12},$$

azaz véges és a határeloszlása megadható ([7]-ben 3.1. Állítás) alapján.

Ha csak a csillapítási tényező ismeretlen, akkor ismert, hogy $\lambda \rightarrow 0$ esetén az elégséges statisztikák leírásához szükséges a χ_1^2 -eloszlás. Hiszen a karakterisztikus függvényből az is látható, hogy $\lambda \rightarrow 0$ esetén s_{01}^2 és s_{02}^2 aszimptotikusan ekvivalensek, és $2\lambda s_{02}^2$ aszimptotikusan χ_1^2 , ha $\lambda \rightarrow 0$. Már Striebel [15] alapján ismert volt, hogy „kis” λ esetén λ_{01} megfelelő becslés a λ paraméterre. A λ_{01} -re vonatkozó szimulációs eredmények (l. 5.4., 5.6. és 5.12. táblázatok) alátámasztják, hogy az eloszlás aszimptotikusan reciprokon χ_1^2 -eloszlás. A ([7], 3.1. Állítás) felbontás és a ([7], 52. oldal) alapján pedig látható, hogy az átlag és a korrigált tapasztalati szórás nem adhat jó eredményt. Ez azt mutatja, hogy az ezekből adódó konfidencia-intervallum rosszabb, mint a reciprokon χ_1^2 -eloszlás feltételezéséből kapott.

Megjegyzés. A [7]-beli 3.1. Állításban szereplő mennyiségek reciprokának közelítő táblázata és a sorfejtések –

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\lambda} \quad \text{és} \quad \rho = e^{-\lambda}$$

– megtalálhatóak az 5.5. táblázatban, illetve ([7], 55. oldal) formulákban.

Vizsgáljuk meg mennyiben különbözik ettől az az eset, amikor az m és a λ is ismeretlen. Alkalmazzuk a [7] 3. szakaszában leírtakat a szimuláció során vizsgált esetekben, azaz

$$\sigma_w = 1, \quad T = 1, \quad \xi_1 = \xi(0), \quad \xi_2 = \xi(T), \quad \sigma^2 = \frac{1}{2\lambda}, \quad \text{és} \quad \rho = e^{-\lambda}.$$

Hasonlítsuk össze ilyen értékek mellett a $\varphi(t_1, t_2)$ karakterisztikus függvényt az elégséges statisztikák $\psi(t_1, t_2, t_3, t_4)$ karakterisztikus függvényéből (l. [1], 185. oldal) adódó függvénnyel, amikor $t_3 = t_4 = 0$. Ekkor

$$\Lambda = \lambda \quad \text{és} \quad \psi(t_2, 0) = e^{\lambda(2\lambda)^2} \left[\left(1 - it_2 \frac{1}{2\lambda} \right)^2 - i^2 t_2^2 \frac{1}{(2\lambda)^2} e^{-2\lambda} \right].$$

Ezeket felhasználva

$$\psi(t_1, t_2, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{(1 - it_2 \frac{1}{2\lambda})^2 + t_2^2 (\frac{1}{2\lambda})^2 e^{-2\lambda}}} \exp \left\{ -\frac{t_1^2 \frac{1}{2\lambda} (1 + e^\lambda)}{4e^\lambda (1 - it_2 \frac{1}{2\lambda}) (1 + e^{-\lambda})} \right\},$$

ami pontosan megegyezik a $\varphi(t_1, t_2)$ -ből adódó formulával.

Tehát a szimulációnál az s_1^2 statisztika χ_1^2 -eloszlású. Továbbá a várható érték

$$\frac{\sigma^2(1 - \rho)}{2} = \frac{1 - e^{-\lambda}}{4\lambda}$$

és

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} E(s_1^2) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\lambda}}{4\lambda} = \frac{1}{4}.$$

Tehát λ_1 reciprok χ_1^2 -eloszlású, amelynek nem létezik a várható értéke (és így a szórása sem). Ez jól látható az 5.8-9. táblázatok alapján is.

Ezenkívül

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{2\lambda}{1 - e^{-\lambda}} = 2.$$

Az 5.1. és az 5.2. táblázatok segítségével összehasonlíthatjuk a kvantiliseket. A reciprok χ_1^2 kvantilisei, ha a skálaparaméter 2, azaz a ([7], 52. oldal) formula alapján $\sigma = 2$ esetén.

(5.1)

p	0,01	0,05	0,1	0,5	0,9	0,95	0,99
$F^{-1}(p)$	0,3014	0,5206	0,739	4,396	126,6	508,6	12731,7

A λ_1 statisztikáról összegzésül elmondhatjuk, hogy reciprok χ_1^2 -eloszlású, és a $\lambda < 0,1$ esetek között a táblázatok alapján nem lehet különbséget tenni.

Az Arató [1], Arató, Benczúr [2], [3] munkák részletesen foglalkoznak a konfidencia-intervallum készítésével az m , illetve λ paraméterre. A következő részben azt mutatjuk be, hogy adott p valószínűség mellett mikor nem tudunk megadni olyan intervallumot, amelynek alsó határa különbözik a nullától, és benne van a λ valódi paraméter.

Ha mindkét paraméter ismeretlen, akkor jól látható a kvantilis becslések alapján, hogy kis λ paraméter esetén – a p valószínűség értékétől függően – nem tudunk a szimuláció segítségével nullától különböző alsó határú konfidencia-intervallumot adni (l. 5.1–3. táblázat). Például rögtön látható, hogy ha a szimulációnál $\lambda < 0,1$, akkor

$$\lambda < z_{\lambda, 0,01},$$

azaz a kvantilis becslések alapján kapott konfidencia-intervallumban nincs benne a paraméter.

Megvizsgáljuk, hogy ez mennyire adódhat az elméleti viselkedésből, illetve a számolási hibákból és a szimuláció „tökéletlenségéből”.

Mivel $\hat{\lambda}$ és λ_2 becslések eloszlását nem tudtuk pontosan meghatározni, ezért kezdjük a λ_1 esettel. Az eloszlásfüggvény (l. [7], 52. oldal)

$$F(x) = 2 - 2\Phi\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right), \quad \text{ha } x > 0,$$

ahol

$$a = \frac{2\lambda}{1 - e^{-\lambda}}.$$

Mivel

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} a = 2,$$

így λ_1 kvantiliseit megadhatjuk $\lambda \rightarrow 0$ esetén (l. (5.1)). Látható, hogy a kvantilis becslések két értékes jegyre közelítik a kvantiliseket.

Ezután pontosan meghatározzuk, hogy rögzített p valószínűség esetén mely λ értékekre nincs benne az eloszlás kvantilisei alapján adott konfidencia-intervallumban.

Ha η reciprokok χ^2_1 -eloszlású, akkor legyen x_p olyan, hogy

$$P(\eta < x_p) = p.$$

Tehát a

$$p = 2 - 2\Phi\left(\sqrt{\frac{1}{x_p}}\right),$$

azaz

$$x_p = \frac{1}{\left[\Phi^{-1}\left(1 - \frac{p}{2}\right)\right]^2}.$$

A λ_1 kvantiliseire használjuk a $z_{\lambda_1, p}$ jelölést, azaz

$$P(\lambda_1 < z_{\lambda_1, p}) = p.$$

Kérdés, mikor teljesül, hogy

$$\lambda < z_{\lambda_1, p},$$

azaz

$$\lambda < \frac{2\lambda}{1 - e^{-\lambda}} x_p = \frac{2\lambda}{1 - e^{-\lambda}} \frac{1}{\left[\Phi^{-1}\left(1 - \frac{p}{2}\right)\right]^2}.$$

Jelölje u_p azt a λ értéket, amikor az előző egyenlőtlenségben egyenlőség teljesül, azaz

$$u_p = -\ln\left(1 - \frac{1}{\left[\Phi^{-1}\left(1 - \frac{p}{2}\right)\right]^2}\right).$$

Az egyenlet megoldása közben adódik, hogy csak

$$x_p < 0,5$$

esetén van ilyen λ , azaz ha

$$p < 0,157299.$$

A következő táblázat néhány ilyen értéket tartalmaz.

p	0,01	0,05	0,1	0,15	0,157299	0,16	0,20
x_p	0,1507	0,2603	0,3696	0,4825	0,4999995	0,5065	0,6088
u_p	0,3587	0,7353	1,344	3,356	13,8155	—	—

A λ_1 statisztika eloszlása alapján elkészített u_p értékeket szemléletesen jól láthatjuk az 1. ábrán. Továbbá a 2–4. ábrák (az 5.1–3. táblázat) pedig a megfelelő kvantilis becslések alapján készültek. Az ábrák mindegyike tartalmazza a $p = 0,01, 0,05, 0,1, 0,5$ eseteket kiegészítve az $f(\lambda) = \lambda$ egyenessel, s így a metszéspontok megadják, hogy mely p érték esetén milyen λ -ra nincs a konfidencia-intervallumnak nullától különböző pozitív alsó határa. A 1–4. ábrák és az (5.2)-ben szereplő közelítő értékek azt mutatják, hogy az alsó határ a λ_1 alapján becsülhető a legtovább, azaz adott p valószínűségekre ekkor a legkisebb az u_p értéke.

(5.2)

p	0,01	0,05	0,1
$u_{p,\hat{\lambda}}$	0,4483	1,0941	2,0571
u_{p,λ_1}	0,3527	0,7325	1,3521
u_{p,λ_2}	0,9013	1,8399	3,0750

Figyeljük meg, hogy a becsült u_{p,λ_1} értékek milyen jól közelítik a megfelelő elméleti értéket.

Megjegyzés. Az 1. ábra ezenkívül tartalmazza a $p = 0,15, 0,16, 0,2$ eseteket. Fontos feladat lehet a közelítő táblázatok megadása a kvantilisekre, hiszen még nagy λ esetén is erősen különböznek a becsült kvantilisok az ismert m esetben kiszámított értékektől (l. [4]).

Néhány további tapasztalat röviden.

1. A $\hat{\lambda}$ és λ_2 statisztikákról az 5.11. táblázat alapján: a táblázat a nemcentrális χ^2_1 -eloszlás alapján adódó (PT)-becsléseket és a maximum-likelihood becsléseket adja meg. Látható, hogy nincs lényeges különbség a kétféle becslés között. Továbbá a helyparaméter négyzete jól közelíti a $z_{\lambda,0,5}$ értékét (5.1–2. táblázat), illetve megfigyelhető, hogy a skálaparaméter értéke gyakorlatilag a $(0,7,0,9)$ intervallumban mozog. Gondoljuk végig, mit is jelent itt a skálaparaméter, és hogyan kaphatunk belőle konfidencia-intervallumot!
2. A táblázatok értékei – $\lambda \geq 100$ esetekben – jól mutatják, hogy az [1] könyvben leírt és jellemzett aszimptotikus normalitás teljesül, így a normális eloszlás (t -eloszlás) jól használható konfidencia-intervallumok készítésére.
3. A becslések szimulálásakor kiderült, hogy $\lambda \geq 100$ esetén az $n = 1000$ beosztás a $[0,1]$ intervallumon kevés – a [7]-beli (5) formulával leírt módon – a σ_w^2 jó becsléséhez.
4. Az 5.6. és 5.12. táblázat magyarázatot adhat arra, hogy miért lehet jó becslés kis λ esetén λ_{01} .

5.1. táblázat. Kvantilisok λ maximum-likelihood becslésére.

$\lambda \backslash p$	0,01	0,05	0,1	0,5	0,9	0,95	0,99
10^{-9}	0,350	0,644	0,938	3,542	10,233	13,013	19,528
10^{-7}	0,351	0,643	0,944	3,566	10,198	12,948	19,459
10^{-5}	0,349	0,641	0,936	3,556	10,190	12,947	19,198
10^{-3}	0,350	0,644	0,940	3,562	10,178	12,955	19,141
10^{-2}	0,352	0,654	0,947	3,570	10,142	12,910	19,167
0,1	0,37	0,68	0,99	3,64	10,30	13,10	19,52
0,5	0,46	0,83	1,17	3,90	10,30	12,93	18,73
1	0,58	1,05	1,46	4,42	11,28	14,05	20,51
2	0,89	1,52	2,02	5,29	12,27	15,11	21,67
5	2,15	3,21	3,97	8,16	15,86	18,91	25,59
10	4,87	6,55	7,64	13,14	22,06	25,32	32,56
20	11,34	13,90	15,53	23,03	34,06	37,97	46,19
50	32,99	37,98	40,89	53,08	69,04	74,44	85,58
100	71,63	79,56	84,12	103,17	127,51	135,69	151,97
1000	743,96	813,33	853,55	1016,82	1227,21	1298,12	1441,28

5.2. táblázat. Kvantilisok a λ_1 becslésre.

$\lambda \backslash p$	0,01	0,05	0,1	0,5	0,9	0,95	0,99
10^{-9}	0,301	0,527	0,752	4,394	129,78	518,94	14806,46
10^{-7}	0,300	0,523	0,744	4,371	126,96	499,62	13539,76
10^{-5}	0,299	0,522	0,745	4,400	129,80	523,85	13952,99
10^{-3}	0,302	0,524	0,747	4,422	128,61	526,45	12872,36
10^{-2}	0,302	0,526	0,740	4,425	127,80	523,79	14880,24
0,1	0,311	0,544	0,773	4,641	134,62	535,21	14219,93
0,5	0,377	0,661	0,940	5,509	164,25	653,05	16243,21
1	0,473	0,815	1,163	6,879	197,90	827,69	21351,75
2	0,69	1,19	1,70	10,19	292,61	1189,92	32694,29
5	1,49	2,60	3,70	22,25	640,67	2674,51	70891,59
10	2,98	5,22	7,44	43,92	1230,69	4995,15	131177,72
20	6,02	10,50	14,86	87,93	2551,38	10004,34	260795,59

5.3. táblázat. Kvantilisek a λ_2 becslésre.

$\lambda \backslash p$	0,01	0,05	0,1	0,5	0,9	0,95	0,99
10^{-9}	0,661	1,067	1,429	4,146	10,802	13,599	20,114
10^{-7}	0,665	1,063	1,424	4,174	10,747	13,546	20,024
10^{-5}	0,656	1,068	1,422	4,160	10,755	13,520	19,795
10^{-3}	0,662	1,070	1,426	4,174	10,739	13,547	19,661
10^{-2}	0,670	1,084	1,434	4,182	10,720	13,499	19,659
0,1	0,689	1,112	1,479	4,251	10,871	13,691	20,058
0,5	0,797	1,262	1,657	4,528	11,223	13,920	20,484
1	0,927	1,472	1,918	4,965	11,783	14,553	20,963
2	1,25	1,91	2,43	5,74	12,76	15,61	22,18
5	2,46	3,48	4,23	8,47	16,24	19,24	25,98
10	5,04	6,73	7,81	13,30	22,26	25,55	32,86
20	11,40	13,96	15,62	23,14	34,18	38,07	46,33
50	33,04	38,06	40,91	53,13	69,09	74,46	85,65
100	71,69	79,57	84,18	103,17	127,51	135,66	151,94
1000	743,58	812,87	852,98	1017,18	1226,11	1295,18	1435,87

5.4. táblázat. Kvantilisek a λ_{01} becslésre.

$\lambda \backslash p$	0,01	0,05	0,1	0,5	0,9	0,95	0,99
10^{-7}	$1,5 \cdot 10^{-8}$	$2,6 \cdot 10^{-8}$	$3,7 \cdot 10^{-8}$	$2,2 \cdot 10^{-7}$	$6,3 \cdot 10^{-6}$	$2,510^{-5}$	$6,610^{-4}$
10^{-5}	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$2,6 \cdot 10^{-6}$	$3,7 \cdot 10^{-6}$	$2,2 \cdot 10^{-5}$	$6,3 \cdot 10^{-4}$	0,0025	0,069
10^{-3}	$1,5 \cdot 10^{-4}$	0,000257	0,000368	0,00218	0,062	0,230	2,027
10^{-2}	0,0015	0,0026	0,0037	0,0218	0,475	1,175	7,067
0,1	0,015	0,026	0,038	0,207	2,05	4,40	24,06
0,5	0,089	0,149	0,206	0,83	5,9	12,2	61,1
1	0,197	0,319	0,426	1,50	9,9	20,2	102,1
2	0,421	0,657	0,861	2,90	19,2	39,4	202,4
5	1,07	1,65	2,16	7,20	48,1	99,1	506,4
10	2,14	3,33	4,36	14,42	93,6	189,8	1005,6
20	4,37	6,72	8,72	28,95	191,0	391,9	1997,5

5.5. táblázat.

λ	$\frac{2\lambda}{1+e^{-\lambda}}$	$\frac{2\lambda}{1-e^{-\lambda}}$
10^{-9}	1,000000050 10^{-9}	2,000000000
10^{-7}	1,000000050 10^{-7}	2,000000000
10^{-5}	1,000000050 10^{-5}	2,000000000
10^{-3}	1,000000050 10^{-3}	2,001000100
10^{-2}	0,0100499996	2,010016656
0,1	0,1049958375	2,101666388
0,5	0,6224593310	2,541494082
1	1,462117157	3,163953414
2	3,523188313	4,626070572
5	9,933071491	10,06783655
10	19,99909204	20,00090804
20	39,9999992	40,0000008
50	100,0000000	100,0000000

5.6. táblázat.

λ	$\hat{\sigma}_{\lambda}(\chi_1)$	$\hat{\sigma}_{\lambda_1}(\chi_1)$	$\hat{\sigma}_{\lambda_2}(\chi_1)$	$\hat{\sigma}_{\lambda_{01}}(\chi_1)$
10^{-9}	2,135	2,043	2,959	0,0000000010
10^{-7}	2,097	1,943	3,016	0,0000000943
10^{-5}	2,164	2,030	3,056	0,0000101994
10^{-3}	2,103	1,974	2,954	0,0009849837
10^{-2}	2,186	2,049	3,113	0,0097313111
0,1	2,193	2,086	3,049	0,1005394659
0,5	2,529	2,575	3,295	0,5116286765
1	2,908	3,041	3,666	0,9929536024
2	3,834	4,316	4,541	1,8876786443
5	7,096	10,096	7,573	5,0552630484
10	12,226	20,800	12,409	10,3854189384
20	22,232	39,762	22,327	20,4598142270
50	51,611	103,782	51,663	50,1775524064
100	101,920	191,048	101,949	99,0642703366
500	502,987	1014,469	502,982	504,0998428836
1000	1002,353	2072,311	1002,350	997,5608938731

5.7. táblázat.

λ	\bar{m}	\bar{m}_1	\bar{m}_2
10^{-9}	-328,184908	-328,193052	-328,179580
10^{-7}	-124,882695	-124,875595	-124,884553
10^{-5}	-12,932015	-12,938207	-12,929066
10^{-3}	0,287774	0,287226	0,292341
10^{-2}	-0,194302	-0,190979	-0,194236
0,1	-0,008145	-0,003466	-0,010227
0,5	0,017906	0,013327	0,022725
1	-0,011508	-0,003422	-0,018271
2	0,022027	0,026912	0,017645
5	0,003324	-0,000577	0,004392
10	0,004124	0,000694	0,004402
20	0,000170	-0,003358	0,000306
50	-0,000588	-0,004599	-0,000430
100	-0,000198	0,000607	-0,000213
500	-0,000046	-0,000067	-0,000046
1000	0,000030	0,000203	0,000030

λ	σ_m^*	$\sigma_{m_1}^*$	$\sigma_{m_2}^*$
10^{-9}	22567,43198	22567,43439	22567,43164
10^{-7}	2297,54239	2297,54520	2297,54032
10^{-5}	221,19998	221,20621	221,20151
10^{-3}	22,53552	22,53430	22,53957
10^{-2}	7,16012	7,15200	7,16812
0,1	2,17374	2,17675	2,18135
0,5	0,88849	0,88528	0,90783
1	0,58614	0,58266	0,61386
2	0,36130	0,38529	0,37737
5	0,16718	0,22233	0,17751
10	0,09211	0,15534	0,09604
20	0,04809	0,10892	0,04914
50	0,01921	0,07162	0,01957
100	0,01002	0,04931	0,01007
500	0,00203	0,02234	0,00203
1000	0,00107	0,01612	0,00107

5.8. táblázat.

λ	$\bar{\lambda}$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$
10^{-9}	4,829	1655,893	5,406
10^{-7}	4,805	682,617	5,425
10^{-5}	4,843	1282,959	5,431
10^{-3}	4,740	1323934,599	5,333
10^{-2}	4,785	32208,582	5,438
0,1	4,820	262466,628	5,441
0,5	5,248	375323,002	5,781
1	5,405	1739,684	5,951
2	6,343	5025,983	6,852
5	9,469	108362,612	9,852
10	14,220	41366,754	14,466
20	24,407	609226,748	24,536
50	53,516	32001983,603	53,584
100	104,018	2476187,904	104,059
500	505,153	1098676,658	505,147
1000	1005,018	217378846,779	1005,021

λ	σ_{λ}^*	$\sigma_{\lambda_1}^*$	$\sigma_{\lambda_2}^*$
10^{-9}	4,063	20082,158	4,110
10^{-7}	4,232	10054,182	4,267
10^{-5}	4,257	15152,575	4,262
10^{-3}	4,243	41684574,454	4,304
10^{-2}	4,131	971400,455	4,217
0,1	4,058	7926294,253	4,147
0,5	4,446	11776567,945	4,523
1	4,103	25694,612	4,175
2	4,501	105546,579	4,507
5	5,071	3036950,518	5,156
10	5,647	1204364,109	5,755
20	7,404	13163793,573	7,489
50	10,177	1007331473,865	10,227
100	14,904	45309009,139	14,956
500	33,307	11879326,211	33,300
1000	51,668	6866120869,699	51,719

5.9. táblázat.

λ	$T_\lambda(\Phi)$	$T_{\lambda_1}(\Phi)$	$T_{\lambda_2}(\Phi)$
10^{-9}	4,259	11,174	4,865
10^{-7}	4,147	9,436	4,790
10^{-5}	4,212	9,718	4,812
10^{-3}	4,092	8,954	4,688
10^{-2}	4,189	10,761	4,846
0,1	4,243	10,281	4,867
0,5	4,553	13,203	5,084
1	4,871	15,532	5,416
2	5,742	20,859	6,257
5	8,930	64,093	9,316
10	13,714	97,204	13,952
20	23,997	207,109	24,105
50	53,098	515,933	53,152
100	103,536	996,798	103,569
500	504,262	5593,433	504,230
1000	1004,917	9652,539	1004,914

λ	$s_\lambda(\Phi)$	$s_{\lambda_1}(\Phi)$	$s_{\lambda_2}(\Phi)$
10^{-9}	3,429	15,987	3,545
10^{-7}	3,364	12,721	3,442
10^{-5}	3,372	13,604	3,395
10^{-3}	3,411	12,117	3,461
10^{-2}	3,253	15,249	3,335
0,1	3,333	14,144	3,412
0,5	3,364	18,111	3,435
1	3,455	21,386	3,534
2	3,689	28,462	3,739
5	4,510	93,469	4,595
10	5,227	138,000	5,284
20	7,216	298,171	7,301
50	10,326	714,436	10,356
100	14,951	1445,055	15,057
500	33,339	7703,103	33,348
1000	51,744	12940,382	51,791

5.10. táblázat.

λ	$T_\lambda(\chi_1)$	$T_{\lambda_1}(\chi_1)$	$T_{\lambda_2}(\chi_1)$
10^{-9}	1,197	-0,233	1,671
10^{-7}	1,136	0,034	1,720
10^{-5}	1,171	-0,056	1,780
10^{-3}	1,044	-0,003	1,596
10^{-2}	1,234	-0,183	1,857
0,1	1,217	-0,072	1,773
0,5	1,557	-0,103	2,019
1	1,700	-0,105	2,183
2	2,389	-0,063	2,866
5	4,847	-2,594	5,123
10	9,063	-0,639	9,261
20	17,416	-4,326	17,495
50	43,982	-1,905	44,002
100	90,321	-23,148	90,246
500	473,256	-67,535	473,207
1000	958,745	34,938	958,801

λ	$s_\lambda(\chi_1)$	$s_{\lambda_1}(\chi_1)$	$s_{\lambda_2}(\chi_1)$
10^{-9}	4,366	17,154	4,553
10^{-7}	4,311	14,074	4,407
10^{-5}	4,347	14,738	4,365
10^{-3}	4,326	13,885	4,408
10^{-2}	4,231	16,540	4,289
10^{-2}	4,231	16,540	4,289
0,1	4,330	15,853	4,439
0,5	4,354	20,611	4,460
1	4,543	23,639	4,637
2	4,845	31,804	4,910
5	5,880	99,852	6,034
10	6,710	145,942	6,818
20	9,489	319,960	9,526
50	13,073	780,823	13,112
100	19,066	1519,424	19,196
500	44,327	8638,175	44,338
1000	67,063	14877,598	66,981

5.11. táblázat.

λ	$T_\lambda(\chi'_1)$	$T_{\lambda_2}(\chi'_1)$	$\hat{\mu}_\lambda(\chi'_1)$	$\hat{\mu}_{\lambda_2}(\chi'_1)$
10^{-9}	1,969	2,125	2,016	2,172
10^{-7}	1,944	2,113	2,002	2,174
10^{-5}	1,960	2,121	2,014	2,178
10^{-3}	1,924	2,086	1,982	2,149
10^{-2}	1,960	2,131	2,010	2,185
0,1	1,971	2,133	2,018	2,183
0,5	2,056	2,188	2,117	2,252
1	2,130	2,261	2,173	2,306
2	2,330	2,443	2,378	2,493
5	2,938	3,003	2,975	3,040
10	3,669	3,701	3,701	3,732
20	4,870	4,880	4,884	4,896
50	7,269	7,272	7,282	7,287
100	10,161	10,163	10,173	10,174
500	22,449	22,448	22,463	22,463
1000	31,695	31,695	31,691	31,691

λ	$s_\lambda(\chi'_1)$	$s_{\lambda_2}(\chi'_1)$	$\hat{\sigma}_\lambda(\chi'_1)$	$\hat{\sigma}_{\lambda_2}(\chi'_1)$
10^{-9}	0,877	0,837	0,874	0,828
10^{-7}	0,873	0,818	0,893	0,835
10^{-5}	0,867	0,805	0,886	0,828
10^{-3}	0,891	0,829	0,900	0,843
10^{-2}	0,839	0,788	0,861	0,814
0,1	0,858	0,808	0,864	0,820
0,5	0,830	0,792	0,875	0,841
1	0,823	0,788	0,825	0,794
2	0,804	0,772	0,826	0,796
5	0,771	0,770	0,783	0,778
10	0,713	0,716	0,721	0,730
20	0,744	0,751	0,740	0,746
50	0,709	0,710	0,691	0,694
100	0,735	0,740	0,726	0,728
500	0,742	0,742	0,738	0,737
1000	0,816	0,817	0,815	0,816

5.12. táblázat.

λ	$\bar{\lambda}_{01}$	$T_{\lambda_{01}}(\Phi)$	$T_{\lambda_{01}}(\chi_1)$
10^{-9}	0,0000004520	0,0000000054	-0,0000000001
10^{-7}	0,0000206315	0,0000004505	0,0000000010
10^{-5}	0,0084782052	0,0000515889	-0,0000004706
10^{-3}	0,4909567321	0,0047249365	-0,0000103112
10^{-2}	0,3025506315	0,0542730904	-0,0006022251
0,1	2,9584553512	0,3849289055	0,0169395202
0,5	10,4419325260	1,2900696625	0,1684887499
1	36,2512922522	2,1221856267	0,3786405268
2	14,3667140500	4,0161238720	0,6984491780
5	49,1358446583	10,5848494511	1,8927356790
10	99,6942998767	19,2742707771	4,5206277313
20	125,0085749353	42,8741669071	7,6138634102
50	325,2563957839	100,7337506954	19,5956627102
100	681,3721028164	201,7760313855	36,6146373116
500	3722,7357327552	1145,2344179125	176,2835040404
1000	6485,1994744147	2121,9602044310	362,5585998907

λ	$\sigma_{\lambda_{01}}^*$	$s_{\lambda_{01}}(\Phi)$	$s_{\lambda_{01}}(\chi_1)$
10^{-9}	0,0000053719	0,0000000075	0,0000000084
10^{-7}	0,0001826169	0,0000006132	0,0000006823
10^{-5}	0,1587709934	0,0000722464	0,0000776469
10^{-3}	12,9482311202	0,0065066266	0,0072211597
10^{-2}	1,4535034414	0,0759872892	0,0812450305
0,1	25,0832457455	0,4816070011	0,5534828201
0,5	162,6980331077	1,3592764498	1,7054502079
1	892,1995757717	2,1310300753	2,6408152358
2	106,7566467028	4,0301749968	5,0440818104
5	407,0417578934	10,6076036140	13,3237372965
10	1136,4993741364	17,4635387746	22,6917896410
20	736,1131006574	43,5090030614	52,9080790675
50	1774,9092015925	96,9639194568	125,3218112837
100	4405,5405647631	205,8868058566	253,1602663898
500	21689,9580049764	1182,0954998355	1462,9321527378
1000	33412,7201642518	2178,6256990969	2618,6756658016

Hivatkozások

- [1] ARATÓ M.: *Linear stochastic systems with constant coefficients*. Springer-Verlag, Berlin, 1982
- [2] ARATÓ M. – BENCZÜR A.: *Some new results in the statistical investigation of elementary gaussian processes* in European meeting of statisticians. Budapest, 1972, (69–83.)
- [3] ARATÓ M. – BENCZÜR A.: *Szimulációs eredmények az elemi Gauss-folyamat paramétereinek becslésének eloszlására*. MTA Számítástechnikai Központ Közlemények 8, 1972, (3–34.)
- [4] ARATÓ M. – KUKI A. – SZABÓ A.: *Exact Distribution of Estimators of Parameters in Ornstein-Uhlenbeck Processes*. Computers Math. Applic. 31, 1996, (45–54.)
- [5] COX D.D.: *Gaussian likelihood estimation for nearly nonstationary AR(1) processes*. Ann. Stat. 19, 1991, (1129–1142.)
- [6] FEGYVERNEKI S.: *A special joint estimation of location and scale with applications*. Publ. Univ. of Miskolc, Series D. Natural Sciences, Mathematics, 39, 1999 (21–27.)
- [7] FEGYVERNEKI S.: *Újabb statisztikai vizsgálatok az Ornstei.-Uhlenbeck folyamatról I. Elméleti háttér*. Alkalmazott Matematikai Lapok 23, 2006, (39–57.)
- [8] GUIRGUIS G. H.: *A rational approximation of the inverse normal probability function*. Comp. Statist. & Data Anal. 11, 1991, (199–201.)
- [9] HAMPEL F. R. – RONCHETTI E. M. – ROUSSEUW P. J. – STAHEL W. A.: *Robust statistics: the approach based on influence functions*. Wiley, New York, 1986
- [10] HUBER P. J.: *Robust statistics*. Wiley, New York, 1981
- [11] KÁLOVICS F.: *A continuation method for Chebyshev approximation*. Publ. Univ. of Miskolc, Series D. Natural Sciences 36, 1995, (33–40.)
- [12] KERÉKFI P.: *A robusztus becslésekről*. Alk. Mat. Lapok 4, 1978, (327–357.)
- [13] KORMOS J.: *Hypothesis testing for nearly nonstationary autoregressive models*. Computers Math. Applic. 19, 1990, (75–82.)
- [14] PAP GY. – VAN ZUIJLEN M. C. A.: *Parameter estimation with exact distribution for multidimensional Ornstein-Uhlenbeck processes*. J. Multivariate Analysis 59, 1996 (153–165.)
- [15] STRIEBEL C. T.: *Densities for stochastic processes*. Ann. Math. Stat. 30, 1959, (559–667.)

(Beérkezett: 2001. május 15.)

FEGYVERNEKI SÁNDOR
 MISKOLCI EGYETEM, MATEMATIKAI INTÉZET
 3515 MISKOLC, MISKOLC-EGYETEMVÁROS
 matfs@gold.uni-miskolc.hu

NEW STATISTICAL INVESTIGATIONS OF ORNSTEIN-UHLENBECK PROCESS
II. SIMULATION

SÁNDOR FEGYVERNEKI

An asymptotic analysis is presented for estimation in the three-parameter Ornstein-Uhlenbeck process, where the parameters are the local mean, the drift and the variance. We are interested in the case when the damping parameter (λ , or $\lambda T = \kappa$) is nearly zero. The asymptotic sufficient statistics can be related to noncentral χ^2_1 distribution. The maximum likelihood estimate of the parameter vector is a solution of a rather complicated system of equations. We describe the methods for solving maximum-likelihood equations. Classical and robust estimators are determined for parameters. It is shown that the lower confidence limit of the drift (or damping) parameter is equal to zero with positive probability when it is near to zero.

AZ INVERZLIMESZ EGY JÁTÉKELMÉLETI ALKALMAZÁSA¹

PINTÉR MIKLÓS

A nem teljes információs játékok szokásos játékelméleti modellbe foglalásának problémája a véleményrangsorok modellezése. A cél a Harsányi János által bevezetett típustér megkonstruálása. A célunk, hogy megmutassuk, miként kapcsolódik a véleményrangsorok kérdése az inverzlimesz fogalmához, illetve egy a mérték inverzlimeszek létezésére kimondott, az ismert tételeknél általánosabb eredmény segítségével egy olyan típustér létezését látjuk be, amely egyetemes, teljes, és a paramétertér, amire épül, tisztán mérhető tér (nem topologikus).

1. Bevezetés

Egy adott szituáció játékelméleti modellezése során gyakran felmerül a játékosok informáltságára vonatkozó ismeretek kérdése, tehát, hogy mit gondolnak az egyes játékosok az adott szituációról, ill. mit gondolnak arról, hogy más játékosok mit gondolnak az adott szituációról s.i.t. A modellt kezelhetetlenül bonyolulttá teheti a különböző szintű vélemények végtelen hierarchiájának kezelése, tehát a véleményrangsorok explicit vizsgálata. Ennek a problémának a kezelésére a köztudás fogalma jelent megoldást (lásd Aumann [1]), tehát egy olyan játék felírása, ahol a játék (minden eleme) köztudott; minden játékos tudja, hogy minden játékos tudja, ... a játék elemeit.

Sok esetben adott a köztudott játék, sokszor azonban olyan szituációt kell modellezni, ahol valamely eleme a játéknak, tehát valamely paraméter nem köztudott. Ekkor a cél szintén egy köztudott játék felírása, tehát egy olyan modell, amely már nem tartalmaz véleményrangsorokat explicit módon.

Harsányi [8] a típus fogalmának bevezetésével kerülte meg a véleményrangsorok problémáját, mely fogalom a játékosok lehetséges „fajtáit” jelenti. Harsányi szerint „*úgy tekintjük a c_i vektort, mint amely az i játékos bizonyos fizikai, társadalmi és pszichológiai jellemzőit reprezentálja, amely vektorban összegyűlnek az i játékos hasznossági függvényének főbb paraméterei, továbbá a főbb elképzelései a*

¹Ezen munka az OTKA T046194 pályázat támogatásával készült.

társadalmi környezetről ... a játék szabályai olyanok, hogy megengedik bármelyik játékosnak, hogy egyetlen lehetséges típusba tartozzon, annak megfelelően, hogy a c_i vektor milyen értéket vesz fel ... minden játékosról feltesszük, hogy ismeri önmaga típusát, de nem ismeri a többi játékosét."

Heifetz és Samet [10] formalizálta Harsányi típus fogalmát (a mérhetőségi struktúrákat itt nem adjuk meg):

1.1. Definíció. Az S paramétertérre épülő típustér $\langle (T_i, \mathcal{M}_i)_{i \in M \cup \{0\}}, (f_i)_{i \in M} \rangle$ (röviden $\langle (T, \mathcal{M}), f \rangle$) (ahol M a játékosok halmaza, és 0 egy extra játékost jelöl) a következő:

1. $T_0 = S$, (T_i, \mathcal{M}_i) mérhető tér $\forall i \in M \cup \{0\}$ -re,
2. $f_i : T_i \rightarrow (\Delta(T, \mathcal{M}), \mathcal{A}_{HS})$ mérhető függvény $\forall i \in M$ -re, ahol Δ a valószínűségi mértékek halmazát jelöli, $T = \times_{j \in M \cup \{0\}} T_j$ és $\mathcal{M} = \otimes_{j \in M \cup \{0\}} \mathcal{M}_j$,
3. $\text{marg}_{(T_i, \mathcal{M}_i)} f_i(t_i) = \delta_{t_i}$, ahol δ_{t_i} a t_i -re koncentrált Dirac-mérték $\forall t_i \in T_i$ -re.

Könnyen látható, hogy az 1.1. definícióban a 2. és a 3. pont „összevonható”:

1.2. Definíció. Az S paramétertérre épülő típustér $\langle (T_i, \mathcal{M}_i)_{i \in M \cup \{0\}}, (f_i)_{i \in M} \rangle$ (röviden $\langle (T, \mathcal{M}), f \rangle$) (ahol M a játékosok halmaza, és 0 egy extra játékost jelöl) a következő:

1. $T_0 = S$, (T_i, \mathcal{M}_i) mérhető tér $\forall i \in M \cup \{0\}$ -re,
2. $f_i : T_i \rightarrow (\Delta(T_{-i}, \mathcal{M}_{-i}), \mathcal{A}_{HS})$ mérhető függvény $\forall i \in M$ -re, ahol $T_{-i} = \times_{j \in (M \cup \{0\}) \setminus \{i\}} T_j$ és $\mathcal{M}_{-i} = \otimes_{j \in (M \cup \{0\}) \setminus \{i\}} \mathcal{M}_j$.

A típusterek két tulajdonságát említjük itt meg. Az első a típustér egyetemes volta. Egy típustér egyetemes egy modell tekintetében (tehát ahol a paramétertér és a lehetséges vélemények rögzítettek), ha minden adott modellbeni típustérnél bővebb, tehát minden véleményt tartalmaz. A második tulajdonság a típusterek teljessége. Egy típustér teljes, ha minden a paramétertérre épülő következetes véleményrangsor típus, tehát ha tetszőleges modellbeni véleményrangsor megfeleltethető egy 1.1. definícióban típusnak.

Sem Harsányi, sem Heifetz és Samet nem konstruált típusteret, adottnak tekintették azt. A típusterek megkonstruálása véleményrangsorokon keresztül Böge és Eisele [3], Mertens és Zamir [14], Brandenburger és Dekel [4], Heifetz [9], Mertens et al. [15] és [17] munkák témája. Úgy tűnik, hogy a kompaktság fogalma nélkül nem lehet teljes egyetemes típusteret előállítani (lásd Heifetz és Samet [11]), így a fenti munkák mindegyike használja a kompaktság fogalmát, bár igen eltérő módokon. Ezen munka, amely [17] egy továbbfejlesztett formája, olyan modellt vezet be, ahol a paramétertérben csak mérhetőségi struktúra van (minden egyéb munkában a paramétertér topologikus), és a vélemények olyan valószínűségi mértékek, amelyek megszorításai a különböző szintű vélemények tereire kompakt regulárisak. Ebben a modellben olyan egyetemes típusteret konstruálunk, amely teljes.

A következő fejezet a matematikai apparátust ismerteti, míg az utolsó rész a matematikai eredmények játékelméleti alkalmazását öleli fel.

2. A mérték inverzlimesz létezése

A következőkben feltesszük, hogy a mértékek valószínűségi mértékek. Előrendezett halmazon olyan halmazt értünk, amelyen értelmezve van egy bináris reláció, mely tranzitív, és ha a halmaz egy eleme relációban van valamely más elemmel, akkor saját magával is relációban van. Felfelé irányított halmazon olyan előrendezett halmazt értünk, amelynek tetszőleges két eleméhez létezik halmazbani majoráns elem. Legyen $\mu \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X})$ gyűrűn értelmezett halmazfüggvény, és legyen $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$. μ szoros a \mathcal{C} halmazrendszeren, ha tetszőleges $\epsilon > 0$ -hoz és tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ -hoz, $\exists C \in \mathcal{C}$, hogy $C \subseteq A$ és $\mu(A \setminus C) < \epsilon$. Továbbá $\forall Z \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ -re legyen

$$\mu^*(Z) \doteq \max \left\{ \inf_{(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}, Z \subseteq \bigcup_n A_n} \sum_n \mu(A_n), \sup_{Z \supseteq A \in \mathcal{A}} \mu(A) \right\}.$$

2.1. Definíció. Legyen (I, \leq) előrendezett halmaz, és legyen $(X_i)_{i \in I}$ nemüres halmazok egy családja. Legyen továbbá $f_{ij} : X_j \rightarrow X_i$, ha $i \leq j$.

1. $(i \leq j \text{ és } j \leq k) \implies f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$,
2. $f_{ii} = \text{id}_{X_i} \ \forall i \in I$ -re.

Az 1., 2. pontoknak eleget tevő $(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ rendszert inverzrendszernek nevezzük.

Az inverzrendszer (projektív rendszer) tehát egymáshoz kapcsolt halmazok rendszere.

2.2. Definíció. Legyen $((X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ inverzrendszer, ahol $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ -k mértékterek.

1. f_{ij} mérhető $\forall (i \leq j)$ -re,
2. $\mu_i = \mu_j \circ f_{ij}^{-1}, \forall (i \leq j)$ -re.

Az 1., 2. pontoknak eleget tevő $((X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ rendszert mérték inverzrendszernek nevezzük.

2.3. Definíció. Legyen $(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ tetszőleges inverzrendszer. Legyenek

$$X = \prod_{i \in I} X_i, \ P = \{x \in X \mid pr_i(x) = f_{ij} \circ pr_j(x), \ \forall (i \leq j)\},$$

ahol pr_i a koordináta leképezés X -ből X_i -be. Ekkor P -t az $(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ inverzrendszer inverzlimeszének nevezzük és $P = \varprojlim (X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ -vel jelöljük. Legyen továbbá $p_i \doteq pr_i|_P$, ekkor $p_i = f_{ij} \circ p_j \ \forall (i \leq j)$ -re.

Az inverzlimesz (projektív limesz) a halmazok Descartes-szorzat fogalmának általánosítása. Ha például (I, \leq) az üres reláció, akkor az inverzlimesz a Descartes-szorzat.

2.4. Definíció. Legyen $((X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ mérték inverzrendszer, és legyen $P = \varprojlim (X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$.

1. (P, \mathcal{A}) , ahol \mathcal{A} a legdurvább (legsűrűbb) σ -algebra, melyre p_i mérhető $\forall i \in I$ -re,
2. $\mu(P, \mathcal{A})$ -n olyan mérték, hogy $\mu \circ p_i^{-1} = \mu_i \forall i \in I$ -re.

Az 1., 2. pontoknak eleget tevő (P, \mathcal{A}, μ) mértékteret mérték inverzlimesznek nevezzük, és $(P, \mathcal{A}, \mu) = \varprojlim ((X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ -vel jelöljük.

A mérték inverzlimesz létezésének egyik problematikus pontja μ σ -additivitása. Ennek a problémának elkülönítése céljából vezetjük be a következő fogalmat.

2.5. Definíció. Legyen $((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ mérték inverzrendszer, és legyen $P = \varprojlim (X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$.

1. $\mathcal{A} = \cup_{i \in I} p_i^{-1}(\mathcal{M}_i)$ algebra,
2. μ \mathcal{A} -n értelmezett olyan additív halmazfüggvény, hogy $\mu \circ p_i^{-1} = \mu_i \forall i \in I$ -re.

Az 1., 2. pontoknak eleget tevő (P, \mathcal{A}, μ) -t gyenge mérték inverzlimesznek nevezzük, és $(P, \mathcal{A}, \mu) = w - \varprojlim ((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ -vel jelöljük.

Ahhoz, hogy „értelmes” mérték inverzlimeszt kapjunk, szükséges P inverzlimesz nemüressége. Ennek biztosítására vezette be Bochner [2] a sorozatmaximalitás fogalmát. Később, Millington és Sion [13] gyengítette a sorozatmaximalitás fogalmát, mely általánosítás a majdnem sorozatmaximalitás.

2.6. Definíció. Az $((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ mérték inverzrendszer majdnem sorozatmaximalis (almost s.m., almost sequentially maximal), ha tetszőleges $i_1 \leq i_2 \leq \dots \in I$ lánchoz $\exists A_{i_n} \subseteq X_{i_n}$ halmazok, hogy

1. $f_{i_n i_m}^{-1}(A_{i_n}) \subseteq A_{i_m} \forall (n \leq m)$ -re,
2. $\mu_{i_n}^*(A_{i_n}) = 0 \forall n$ -re,

ha $x_{i_n} \in (X_{i_n} \setminus A_{i_n})$, és $x_{i_n} = f_{i_n i_{n+1}}(x_{i_{n+1}}) \forall n$ -re, akkor

$$\exists x \in P = \varprojlim (X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j}),$$

hogy $x_{i_n} = p_{i_n}(x) \forall n$ -re.

Vegyük észre, hogy a majdnem sorozatmaximalitás biztosítja az inverzlimesz nemürességét, tehát ebben az esetben a majdnem sorozatmaximalitás kiváltja a Kiválasztási Axiómát.

2.1. KÖVETKEZMÉNY. Legyenek (X_n, \mathcal{M}_n) mérhető terek, $n \in \mathbb{N}$,

$$(Y_n, \mathcal{N}_n) \stackrel{\circ}{=} (\times_{i=1}^n X_i, \otimes_{i=1}^n \mathcal{M}_i), \text{ és } ((Y_n, \mathcal{N}_n, \mu_n), (\mathbb{N}, \leq), f_{mn}|_{m \leq n}),$$

ahol f_{mn} -ek koordináta leképezések és μ_n -ek tetszőleges valószínűségi mértékek, melyek eleget tesznek a 2.2. definíció 2. pontjának. Ekkor

$$((Y_n, \mathcal{N}_n, \mu_n), (\mathbb{N}, \leq), f_{mn}|_{m \leq n})$$

mérték inverzrendszer majdnem sorozatmaximális.

Bizonyítás. Világos, hogy

$$\varprojlim (Y_n, (\mathbb{N}, \leq), f_{mn}|_{m \leq n}) = \times_{i=1}^{\infty} Y_i = \times_{i=1}^{\infty} X_i.$$

A koordináta leképezések szűrjektivitása miatt A_n -eket \emptyset -nak választva kapjuk a 2.6. definícióban szereplő fogalmat. \square

A következő állítás, amely fő matematikai állításunk, Metivier [16] (269. old.), Mallory és Sion [12] eredményeinek általánosítása, tehát Bochner, ill. Choksi [5] eredményeinek további általánosítása.

2.1. TÉTEL. Legyen $((X_i, \mathcal{M}_i, C_i, \mu_i), f_{ij}, (I, \leq))|_{i \leq j}$ mérték inverzrendszer, ahol $C_i \subseteq \mathcal{M}_i$ σ -kompakt halmazrendszer $\forall i \in I$ -re. Ha

1. (I, \leq) felfelé irányított,
2. $f_{ij}(C_j) \subseteq C_i \forall (i \leq j)$ -re,
3. $f_{ij}^{-1}(\{x_i\}) \cap C_j \forall (i \leq j)$ -re σ -kompakt halmazrendszer $\forall x_i \in X_i$ -re,
4. $C_1, C_2 \in C_i$ -ből következik, hogy $C_1 \cap C_2 \in C_i \forall i \in I$ -re,
5. $((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ majdnem sorozatmaximális,
6. μ_i szoros a C_i halmazrendszeren $\forall i \in I$ -re,

akkor $(X, \mathcal{M}, \mu) = \varprojlim ((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ létezik és egyértelmű.

A bizonyítást darabokra bontjuk. Először a σ -additivitás kérdését járjuk körbe.

2.7. Definíció. Legyen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ gyűrű, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ halmazrendszer és μ \mathcal{A} -n értelmezett additív halmazfüggvény. Ekkor \mathcal{C} halmazrendszer μ -majdnem σ -kompakt, ha tetszőleges $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ halmazsorozathoz és tetszőleges $\epsilon > 0$ -hoz $\exists A \subseteq X$, $\mu^*(A) < \epsilon$, hogy ha $\mathcal{C}A \cap (\cap_n C_n) = \emptyset$, akkor $\exists m \in \mathbb{N}$, hogy $\mathcal{C}A \cap (\cap_{n=1}^m C_n) = \emptyset$.

A μ -majdnem σ -kompaktság ilyenén definíciójának oka a majdnem sorozatmaximalitás fogalmából (2.6. definíció) és a 2.2. állításból érthető meg.

2.1. SEGÉDTÉTEL. Legyen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ gyűrű, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ μ -majdnem σ -kompakt halmazrendszer, ahol μ \mathcal{A} -n értelmezett additív halmazfüggvény, mely szoros \mathcal{C} -n. Ekkor μ σ -additív \mathcal{A} -n.

Bizonyítás. A bizonyítást az olvasóra bízuk. \square

A következő állítás Rao [18] eredményének általánosítása.

2.1. ÁLLÍTÁS. Legyen $((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ olyan mérték inverzrendszer, hogy

1. (I, \leq) felfelé irányított halmaz,
2. $((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ mérték inverzrendszer majdnem sorozatmaximális.

Ekkor

$$(P, \mathcal{A}, \mu) = w - \varprojlim ((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$$

gyenge mérték inverzlimesz létezik és egyértelmű.

Bizonyítás. A bizonyítást az olvasóra bízuk. \square

2.2. ÁLLÍTÁS. Legyen $((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ mérték inverzrendszer, $C_i \subseteq \mathcal{M}_i$ σ -kompakt halmazrendszer $\forall i \in I$ -re, és legyen $J \subseteq I$. Ha

1. (I, \leq) felfelé irányított halmaz,
2. a J halmaz minden megszámlálható részhalmazának van legkisebb eleme,
3. $f_{ij}(C_j) \subseteq C_i \ \forall (i \leq j) \in I$ -re,
4. $f_{ij}^{-1}(\{x_i\}) \cap C_j \ \forall (i \leq j)$ σ -kompakt halmazrendszer $\forall x_i \in X_i$ -re,
5. $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_i$ -ből következik, hogy $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{C} \ \forall i \in J$ -re,
6. μ_i szoros a C_i halmazrendszeren $\forall i \in I$ -re,
7. $((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ mérték inverzrendszer majdnem sorozatmaximális,

akkor $\mathcal{C} \triangleq \cup_{i \in J} p_i^{-1}(C_i)$ μ -majdnem σ -kompakt halmazrendszer \mathcal{M} -ben, ahol

$$(P, \mathcal{M}, \mu) = w - \varprojlim ((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j}).$$

Bizonyítás. Az 1., a 7. feltételek és a 2.1. Állítás miatt

$$(P, \mathcal{M}, \mu) = w - \varprojlim ((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$$

létezik és egyértelmű. Ekkor elég látni, hogy tetszőleges $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ -hez és tetszőleges $\epsilon > 0$ -hoz $\exists A \subseteq P$ $\mu^*(A) < \epsilon$, hogy ha $\forall m \in \mathbb{N}$ -re $\mathbb{C}A \cap (\cap_{n=1}^m C_n) \neq \emptyset$, akkor $\mathbb{C}A \cap (\cap_n C_n) \neq \emptyset$.

Legyenek $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ és $\epsilon > 0$ tetszőlegesen rögzítettek. Legyen

$$N_i = \{n \in \mathbb{N} \mid C_n = p_i^{-1}(C'_n), \ C'_n \in C_i, \ i \in J\} \quad \forall i \in J\text{-re.}$$

Legyen továbbá $i(n)$ egy tetszőlegesen rögzített eleme $\{i \in J \mid n \in N_i\}$ -nek.

Legyen i_1 az $\{i(1), i(2), \dots\}$ halmaz legkisebb eleme (a 2. feltétel miatt létezik). Hasonlóan legyen i_m a $J \setminus \{i_n\}_{n < m}$ halmaz legkisebb eleme $\forall m \in \mathbb{N}$ -re.

Legyenek A_{i_n} -ek a 2.6. Definícióbeli halmazok (7. feltétel), és legyenek $\bar{A}_{i_n} \in \mathcal{M}_{i_n}$, hogy $A_{i_n} \subseteq \bar{A}_{i_n}$ és $\mu_{i_n}(\bar{A}_{i_n}) = 0 \ \forall n$ -re (\mathcal{M}_{i_n} -ek σ -algebrák, így léteznek ilyen \bar{A}_{i_n} -ek). Ekkor a 6. feltétel miatt $\exists K_{i_n} \in \mathcal{C}_{i_n}$, hogy

$$K_{i_n} \subseteq \mathbb{C}\bar{A}_{i_n} \text{ és } \mu_{i_n}(K_{i_n}) > 1 - \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \frac{1}{6} \quad \forall n\text{-re.}$$

Legyen

$$A = \cup_n p_{i_n}^{-1}(\mathbb{C}K_{i_n}).$$

A következőkben azt mutatjuk meg, hogy $\mu^*(A) < \epsilon$.

Indirekt tegyük fel, hogy $\mu^*(A) \geq \epsilon$. Ekkor, mivel

$$A = \cup_n p_{i_n}^{-1}(\mathbb{C}K_{i_n}) \text{ és } \mu_{i_n}(\mathbb{C}K_{i_n}) \leq \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \frac{1}{6} \quad \forall n\text{-re,}$$

így $\exists i^* \in I$, $\exists B^{i^*} \in \mathcal{M}_{i^*}$, hogy

$$\mu_{i^*}(B^{i^*}) \geq \frac{5\epsilon}{6}, \text{ és } B = p_{i^*}^{-1}(B^{i^*})$$

jelölés mellett $B \subseteq A$.

Legyen $j_1 \in I$ olyan, hogy $j_1 \geq i^*$ és $j_1 \geq i_1$; általában, legyen $j_n \in I$ olyan, hogy $j_n \geq j_{n-1}$ és $j_n \geq i_n \ \forall n \geq 2$ (1. feltétel). Ekkor $\exists C^{j_1} \in \mathcal{C}_{j_1}$, hogy

$$C^{j_1} \subseteq \left(f_{i^*j_1}^{-1}(B^{i^*}) \setminus (f_{i_1j_1}^{-1}(\mathbb{C}K_{i_1}) \cup A_{j_1}) \right) \text{ és } \mu_{j_1}(C^{j_1}) > \frac{2\epsilon}{3} \quad (6. \text{ feltétel}),$$

ahol A_{j_1} a $j_1 \leq j_2 \leq \dots$ láncra vonatkozik a 2.6. Definícióból. Hasonlóan, $\exists C^{j_n} \in \mathcal{C}_{j_n}$, hogy

$$C^{j_n} \subseteq \left(f_{i^*j_n}^{-1}(B^{i^*}) \setminus (f_{i_nj_n}^{-1}(\mathbb{C}K_{i_n}) \cup A_{j_n}) \right) \text{ és } \mu_{j_n}(C^{j_n}) > \frac{2\epsilon}{3} \quad \forall n\text{-re.}$$

C^{j_n} -ek választása (mértéke) miatt $\cap_{n=1}^m f_{j_1j_n}(C^{j_n}) \neq \emptyset \ \forall m$ -re, így a 3. feltétel miatt $\cap_n f_{j_1j_n}(C^{j_n}) \neq \emptyset$. Legyen $x_{j_1} \in \cap_n f_{j_1j_n}(C^{j_n})$ tetszőlegesen rögzített. Az x_{j_1} választása miatt

$$f_{j_1j_2}^{-1}(\{x_{j_1}\}) \cap (\cap_{n=2}^m f_{j_2j_n}(C^{j_n})) \neq \emptyset \quad \forall m\text{-re.}$$

Ekkor a 4. feltétel miatt

$$f_{j_1j_2}^{-1}(\{x_{j_1}\}) \cap (\cap_{n \geq 2} f_{j_2j_n}(C^{j_n})) \neq \emptyset.$$

Legyen

$$x_{j_2} \in f_{j_1j_2}^{-1}(\{x_{j_1}\}) \cap (\cap_{n \geq 2} f_{j_2j_n}(C^{j_n}))$$

tetszőlegesen rögzített.

Ekkor

i. $f_{i_1 j_1}(x_{j_1}) \notin \mathbb{C}K_{i_1}$ és $f_{i_2 j_2}(x_{j_2}) \notin \mathbb{C}K_{i_2}$,

ii. $x_{j_1} \in f_{i^* j_1}^{-1}(B^{i^*})$ és $x_{j_2} \in f_{i^* j_2}^{-1}(B^{i^*})$.

Defináljunk a fenti módon egy $(x_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot, ekkor $\forall n$ -re

iii. $f_{i_n j_n}(x_{j_n}) \notin \mathbb{C}K_{i_n}$,

iv. $x_{j_n} \in f_{i^* j_n}^{-1}(B^{i^*})$.

A 7. feltétel miatt $\exists x \in P$, hogy $x_{j_n} = p_{j_n}(x) \forall n$ -re. Ekkor azonban, iii. miatt $x \notin A$, míg iv. miatt $x \in B$, tehát $B \not\subseteq A$, ami ellentmondás.

A következőkben azt mutatjuk meg, hogy ha $\forall m \in \mathbb{N}$ -re $\mathbb{C}A \cap (\cap_{n=1}^m C_n) \neq \emptyset$, akkor $\mathbb{C}A \cap (\cap_n C_n) \neq \emptyset$.

Legyen

$$C_1^m = K_{i_1} \cap \left(\cap_{j \in J} f_{i_1 j} \left(\cap_{\{n \in N_j | n \leq m\}} p_j(C_n) \right) \right) \quad \forall m \in \mathbb{N}\text{-re.}$$

Ekkor $C_1^m \neq \emptyset$, a 3. és az 5. feltétel miatt $C_1^m \in \mathcal{C}_i \forall m \in \mathbb{N}$ -re. Világos, hogy $C_1^m \supseteq C_1^{m+1} \forall m \in \mathbb{N}$, így \mathcal{C}_i σ -kompaktsága miatt $\cap_m C_1^m \neq \emptyset$.

Legyen $x_{i_1} \in \cap_m C_1^m$ tetszőlegesen rögzített. A 4. feltétel miatt

$$f_{i_1 i_2}^{-1}(\{x_{i_1}\}) \cap C_{i_2}$$

σ -kompakt halmazrendszer. x_{i_1} választása miatt

$$C_2^m = K_{i_2} \cap (f_{i_1 i_2}^{-1}(\{x_{i_1}\})) \cap \left(\cap_{j \in J \setminus \{i_1\}} f_{i_2 j} \left(\cap_{\{n \in N_j | n \leq m\}} p_j(C_n) \right) \right) \neq \emptyset$$

$\forall m \in \mathbb{N}$ -re, így $\cap_m C_2^m \neq \emptyset$.

Legyen $x_{i_2} \in \cap_m C_2^m$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor

a: $x_{i_1} = f_{i_1 i_2}(x_{i_2})$,

b: $x_{i_2} \in K_{i_2} \cap \left(\cap_{n \notin N_{i_1} \cup N_{i_2}} p_{i_2}(C_n) \right) \cap \left(p_{i_2} \left(\cap_{n \in N_{i_1} \cup N_{i_2}} C_n \right) \right)$.

Alkalmazva ezt az eljárást az $i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq \dots$ láncra, kapunk pontok egy halmazát, mely pontok a következő tulajdonságokkal bírnak $\forall k \in \mathbb{N}$ -re:

c: $x_{i_k} = f_{i_k i_{k+1}}(x_{i_{k+1}})$,

d: $x_{i_k} \in K_{i_k} \cap \left(\cap_{n \notin \cup_{j=1}^k N_{i_j}} p_{i_k}(C_n) \right) \cap \left(p_{i_k} \left(\cap_{n \in \cup_{j=1}^k N_{i_j}} C_n \right) \right)$.

A c: és d: pontok miatt

$$x_{i_k} \in (X_{i_k} \setminus \mathbb{C}K_{i_k}), \quad x_{i_k} = f_{i_k i_{k+1}}(x_{i_{k+1}}) \quad \forall k \in \mathbb{N}\text{-re,}$$

így $A_{i_k} \subseteq \mathbb{C}K_{i_k} \forall k$ -ra és a 7. feltétel miatt $\exists x \in \varprojlim (X_i, (I, \leq), f_{ij} | i \leq j)$, hogy $x_{i_k} = p_{i_k}(x) \forall k$ -ra. Ekkor azonban $x \in \mathbb{C}A \cap (\cap_n C_n)$, így $\mathbb{C}A \cap (\cap_n C_n) \neq \emptyset$. \square

2.3. ÁLLÍTÁS. Legyen $((X_i, \mathcal{M}_i, \mathcal{C}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ mérték inverzrendszer, ahol $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{M}_i$ σ -kompakt halmazrendszer $\forall i \in I$ -re. Ha

1. (I, \leq) felfelé irányított halmaz,
2. $(X, \mathcal{A}, \mu) = w - \varprojlim ((X_i, \mathcal{M}_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ létezik,
3. $\forall (i_1 \leq i_2 \leq \dots)$ láncra, $\cup_n p_{i_n}^{-1}(\mathcal{C}_{i_n})$ μ -majdnem σ -kompakt halmazrendszer,
4. μ_i szoros \mathcal{C}_i -n $\forall i \in I$ -re,

akkor

$$(X, \mathcal{M}, \mu) = \varprojlim ((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$$

létezik és egyértelmű.

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg, hogy μ σ -additív $\cup_{i \in I} p_i^{-1}(\mathcal{M}_i)$ -n.

A 4. feltétel miatt μ szoros $\cup_{i \in I} p_i^{-1}(\mathcal{C}_i)$ -n.

Legyenek $A_1, A_2, \dots \in \cup_{i \in I} p_i^{-1}(\mathcal{M}_i)$ tetszőleges diszjunkt halmazok, hogy $\cup_n A_n \in \cup_{i \in I} p_i^{-1}(\mathcal{M}_i)$. A_n -ek definíciója miatt $\forall n$ -hez $\exists i(n) \in I$ és $\exists A_n^{i(n)} \in \mathcal{M}_{i(n)}$, hogy

$$A_n = p_{i(n)}^{-1}(A_n^{i(n)}).$$

Legyen $i_1 = i(1)$. Az 1. feltétel miatt $\exists i^* \in I$, hogy $i_1 \leq i^*$ és $i(2) \leq i^*$. Legyen $i_2 = i^*$. Defináljuk az $i_1 \leq i_2 \leq \dots$ lánc többi elemét hasonlóan. A 3. tulajdonság miatt $\cup_n p_{i_n}^{-1}(\mathcal{C}_{i_n})$ μ -majdnem σ -kompakt halmazrendszer, így a 2.1. segédteétel miatt

$$\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n).$$

Az A_1, A_2, \dots halmazok tetszőlegesen választottak voltak, így μ σ -additív $\cup_{i \in I} p_i^{-1}(\mathcal{M}_i)$ -n. Ekkor a mérték kiterjeszthetősége miatt (lásd például Halmos [7])

$$(X, \mathcal{M}, \mu) = \varprojlim ((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$$

létezik és egyértelmű. □

Bizonyítás. [A 2.1. Tétel bizonyítása]

A 2.2. Állítás miatt tetszőleges $i_1 \leq i_1 \leq \dots$ lánc esetén $\cup_n p_{i_n}^{-1}(\mathcal{C}_{i_n})$ μ -majdnem σ -kompakt halmazrendszer. Ekkor a 2.1. Állítás, és a 2.3. Állítás miatt

$$(X, \mathcal{M}, \mu) = \varprojlim ((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$$

létezik és egyértelmű. □

3. Teljes, egyetemes típustér tisztán mérhető paramétertér

Kiindulásképpen legyen S paramétertér, mely paramétertér tartalmazza az összes, a játékosoktól független tényt, amelyeknek befolyása lehet a játékra, pl. a játék leírását. A játékosok véleményeinek modellezéséhez az S generálta véleményteret kell vennünk, tehát figyelembe kell venni, hogy miként vélekednek az egyes játékosok S -ről, miként vélekednek az egyes játékosok arról, hogy miként vélekednek a játékosok S -ről, s.i.t.

3.1. Definíció. A paramétertér mérhető tér (S, \mathcal{A}_S) , ahol \mathcal{A}_S az S téren definiált σ -algebra.

A paraméterterről csak azt tesszük fel, hogy mérhető. Modellünkben a játékosok olyan fogalmakkal operálnak, mint esemény, kimenetel, valószínűség; erre egy tisztán mértékelméleti modell tűnik alkalmasnak. Tudjuk azonban, hogy tisztán mértékelméleti modell nem feltétlenül eredményez teljes, egyetemes típusteret (lásd Heifetz és Samet [11]).

3.2. Definíció. Jelölje $\Delta(S, \mathcal{A}_S)$ az (S, \mathcal{A}_S) -en értelmezett valószínűségi mértékek halmazát, ekkor $\Delta(S, \mathcal{A}_S) \subseteq [0, 1]^{\mathcal{A}_S}$. Legyen $(\Delta(S, \mathcal{A}_S), \tau)$ a $[0, 1]^{\mathcal{A}_S}$ szorzat-topológia (pontonkénti konvergencia topológia) altereként előállt topológia. Jelöljük a Baire mérhetőségi struktúrát $B(\Delta, \tau)$ -val.

Ahol ez nem vezet félreértéshez, ott $\Delta(S, \mathcal{A}_S)$ helyett a rövidebb $\Delta(S)$ jelölést használjuk. Hasonlóan járunk el $B(\Delta(S), \tau)$ és $B(\Delta(S))$ esetében is.

3.3. Definíció. Defináljunk terek egy sorozatát rekurzív módon, ahol M a játékosok halmaza:

$$\begin{aligned} V_0 &= (S, \mathcal{A}_S) \\ V_1 &= V_0 \otimes (\Delta(V_0)^M, B(\Delta(V_0)^M)) \\ V_2 &= V_1 \otimes (\Delta(V_1)^M, B(\Delta(V_1)^M)) = \\ &= V_0 \otimes (\Delta(V_0)^M, B(\Delta(V_0)^M)) \otimes (\Delta(V_1)^M, B(\Delta(V_1)^M)) \\ &\vdots \\ V_n &= V_{n-1} \otimes (\Delta(V_{n-1})^M, B(\Delta(V_{n-1})^M)) = \\ &= V_0 \otimes \otimes_{j=0}^{n-1} (\Delta(V_j)^M, B(\Delta(V_j)^M)) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Vegyük a $V_\infty = S \times \times_{j=0}^\infty \Delta(V_j)^M$ végtelen szorzatot. V_∞ -t *véleménytérnek*, egy pontját *világállapotnak* nevezzük.

V_0 egy pontját paraméter értéknek nevezzük, egyszerűen egy lehetséges paramétere a játéknak. V_1 egy pontja nem más, mint egy lehetséges paraméter érték,

és a hozzá tartozó első rendű vélemények (a játékosok véleménye a lehetséges paraméterekről), s.i.t.

Ha $v \in V_\infty$, akkor v nem más, mint

$$v = (s, \mu_1^1, \mu_1^2, \dots, \mu_2^1, \mu_2^2, \dots),$$

ahol μ_j^i jelentése: az „ i ” játékos j -ed rendű véleménye. Tehát V_∞ minden eleme felfogható úgy, mint egy *véleményrangsor*, $(\mu_1^i, \mu_2^i, \dots)$ minden játékosra ($\forall i \in M$ -re), és még egy lehetséges paraméter.

3.4. Definíció. Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített. Egy véleményrangsor $(\mu_1^i, \mu_2^i, \dots)$ következetes, ha $\forall n \geq 2$ -re

1. $\text{marg}_{V_{n-2}} \mu_n^i = \mu_{n-1}^i,$
2. $\text{marg}_{[\Delta(V_{n-2})]^i} \mu_n^i = \delta_{\mu_{n-1}^i},$

ahol $\mu_n^i \in [\Delta(V_{n-1})]^i$ ($[\Delta(V_{n-1})]^i$ az i indexű másolata $\Delta(V_{n-1})$ -nek), továbbá marg_{V_n} jelöli a V_n -en lévő peremmértéket.

Az első feltétel azt rögzíti, hogy az adott játékos véleménye egy adott dologról nem változik a véleményrangsorban. A második feltétel szerint az adott játékos pontosan ismeri a saját véleményét (lásd Harsányi [8]). A fenti két feltétel felfogható úgy, mint a játékosok „logikája”, feltesszük, hogy ez a „logika” *köztudott*.

3.5. Definíció. Vegyük azokat a pontokat $(s, \mu_1^1, \mu_1^2, \dots, \mu_2^1, \mu_2^2, \dots)$ V_∞ -ből, melyek esetén a véleményrangsorok $(\mu_1^i, \mu_2^i, \dots)$ következetesek $\forall i \in M$ -re. Legyen az összes ilyen pont halmaza V_∞^c , és hívjuk V_∞^c -t *következetes alterének*.

A c jelölést más terek esetében is használjuk, és jelentése megegyezik a 3.5. Definícióban elmondottakkal.

Modellünkben a véleményrangsorok olyan valószínűségi mértékek sorozatai, melyek következetesek és megszorításai a különböző rendű „csonka” véleményterekre kompakt regulárisak. Ebből következően definiáljuk újra a véleményteret (3.3. Definíció):

3.6. Definíció. Legyen

$$\begin{aligned} V'_0 &= V_0 \\ V'_1 &= V'_0 \otimes \left(\Delta_{MC}(V'_0)^M, B \left(\Delta_{MC}(V'_0)^M \right) \right) \\ V'_2 &= \left(V'_1 \otimes \left(\Delta_{MC}(V'_1)^M, B \left(\Delta_{MC}(V'_1)^M \right) \right) \right)^c \\ &\vdots \\ V'_n &= \left(V'_{n-1} \otimes \left(\Delta_{MC}(V'_{n-1})^M, B \left(\Delta_{MC}(V'_{n-1})^M \right) \right) \right)^c \\ &= \left(V'_0 \otimes_{j=0}^{n-1} \left(\Delta_{MC}(V'_j)^M, B \left(\Delta_{MC}(V'_j)^M \right) \right) \right)^c \\ &\vdots \end{aligned}$$

ahol Δ_{MC} jelöli azon valószínűségi mértékek halmazát, hogy

$$\begin{aligned}\Delta_{MC}(V'_0) &= \Delta(V'_0) \\ \Delta_{MC}(V'_1) &= \Delta_C \left(\Delta_{MC}(V'_0)^M, B \left(\Delta_{MC}(V'_0)^M \right) \right) \\ \Delta_{MC}(V'_2) &= \Delta_C \left(\left(\otimes_{j=0}^1 \left(\Delta_{MC}(V'_j)^M, B \left(\Delta_{MC}(V'_j)^M \right) \right) \right)^c \right) \\ &\vdots \\ \Delta_{MC}(V'_n) &= \Delta_C \left(\left(\otimes_{j=0}^{n-1} \left(\Delta_{MC}(V'_j)^M, B \left(\Delta_{MC}(V'_j)^M \right) \right) \right)^c \right) \\ &\vdots\end{aligned}$$

ahol Δ_C a kompakt reguláris (az előző fejezetben használt terminológia szerint: a kompakt halmazokon szoros) valószínűségi mértékek halmazát jelöli.

Látható, hogy V'_n egy tetszőleges pontja olyan véleményrangsorokat tartalmaz, amelyekben a vélemények maximum n -ed rendűek, következtetések, és a megszorítások a többi játékos hasonló tulajdonságú véleményeinek tereire kompakt reguláris valószínűségi mértékek. Tehát V'_n -ek már csak azokat a véleményeket tartalmazzák, amelyekkel a modellünkben foglalkozni kívánunk.

A következő fogalom a legfontosabb lépés fő eredményünk bizonyításához.

3.7. Definíció. Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített. Defináljuk a csonka véleményterek következő sorozatát (lásd a 3.3. Definíciót):

$$\begin{aligned}C_0 &= \left(\Delta_{MC}(V'_0)^{M \setminus \{i\}}, B \left(\Delta_{MC}(V'_0)^{M \setminus \{i\}} \right) \right) \\ C_1 &= \left(\otimes_{j=0}^1 \left(\Delta_{MC}(V'_j)^{M \setminus \{i\}}, B \left(\Delta_{MC}(V'_j)^{M \setminus \{i\}} \right) \right) \right)^c \\ &\vdots \\ C_n &= \left(\otimes_{j=0}^n \left(\Delta_{MC}(V'_j)^{M \setminus \{i\}}, B \left(\Delta_{MC}(V'_j)^{M \setminus \{i\}} \right) \right) \right)^c \\ &\vdots\end{aligned}$$

A csonka véleményterek segítségével leválasztottuk a szorzatterek nem topológikus részét.

A következő definícióban adjuk meg a használni kívánt mérték inverzrendszer mérhető tereit.

3.8. Definíció. Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített. Defináljunk terek egy

sorozatát rekurzív módon:

$$\begin{aligned}
 T_0 &= V'_0 \\
 T_1 &= V'_0 \otimes \left(\Delta_{MC}(V'_0)^{M \setminus \{i\}}, B \left(\Delta_{MC}(V'_0)^{M \setminus \{i\}} \right) \right) \\
 T_2 &= \left(V'_1 \otimes \left(\Delta_{MC}(V'_1)^{M \setminus \{i\}}, B \left(\Delta_{MC}(V'_1)^{M \setminus \{i\}} \right) \right) \right)^c \\
 &\vdots \\
 T_n &= \left(V'_{n-1} \otimes \left(\Delta_{MC}(V'_{n-1})^{M \setminus \{i\}}, B \left(\Delta_{MC}(V'_{n-1})^{M \setminus \{i\}} \right) \right) \right)^c \\
 &= \left(V'_0 \otimes \otimes_{j=0}^{n-1} \left(\Delta_{MC}(V'_j)^{M \setminus \{i\}}, B \left(\Delta_{MC}(V'_j)^{M \setminus \{i\}} \right) \right) \right)^c \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

A következő fogalom egy adott játékos lehetséges típusainak halmaza.

3.9. Definíció. Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített, és vegyük a következő halmazt:

$$T^i = \left(\times_{j=0}^{\infty} \Delta_{MC}(V'_j)^i \right)^c.$$

Ekkor T^i az „ i ” játékos típusainak halmaza, T^i egy pontja az „ i ” játékos egy lehetséges típusa.

Az „ i ” játékos típusainak halmaza tehát tartalmazza az összes lehetséges következetes véleményrangsort. Tehát, ha $t \in T^i$, akkor

$$t = (\nu_1^i, \nu_2^i, \nu_3^i, \dots),$$

és t következetes. Ezen tulajdonságok miatt T^i , ha T^i benne van egy típustérben, akkor ez egy *teljes típustér*. Látható, hogy modellünkben a vélemények még nem, de azok megszorításai a csonka véleményterekre már kompakt reguláris valószínűségi mértékek.

3.1. KÖVETKEZMÉNY. T^i egy szorzattér altere, így topológiája a pontonkénti konvergencia topológia: (T^i, τ) .

3.2. KÖVETKEZMÉNY. Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített,

$$((T_n, \nu_{n+1}^i), (\mathbb{N} \cup \{0\}, \leq), pr_{mn}|_{m \leq n}) \quad (1)$$

mérték inverzrendszer, ahol pr_{mn} koordináta leképezés T_n -ből T_m -be $\forall (m \leq n)$ -re, és $(\nu_1^i, \nu_2^i, \dots) \in T^i$.

Bizonyítás. A mérték inverzrendszer definíciója megtalálható a 2.2. Definícióban.

- $pr_{mn} = pr_{mk} \circ pr_{kn} \quad \forall (m \leq k \leq n)$ -re, a koordináta leképezések definíciója miatt,
- $pr_{nn} = id_{T_n^c}$ $\forall n$ -re közvetlenül adódik a koordináta leképezések definíciójából,
- pr_{mn} mérhető $\forall (m \leq n)$ -re, a szorzat mérhetőségi struktúra közvetlen következménye,
- $\nu_{n+1}^i(pr_{mn}^{-1}(A)) = \nu_{m+1}^i(A) \quad \forall (m \leq n)$ -re és $\forall A \in T_m$ mérhető halmazra a véleményrangsorok következetessége miatt.

□

A 3.2. Következmény kapcsolatot teremt a véleményterek, véleményrangsorok és a mérték inverzrendszer fogalmak között.

3.1. *Megjegyzés.* A 3.2. Következményben (1) a

$$((C_n, marg_{C_n} \nu_{n+2}^i), (\mathbb{N} \cup \{0\}, \leq), pr_{mn}|_{m \leq n}) \quad (2)$$

mérték inverzrendszerre cserélhető.

A következő állítás azt mutatja, hogy az igazi kérdés ν^i σ -additivitása, tehát hogy létezik-e a mérték inverzlimesz.

3.1. ÁLLÍTÁS. Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített. Az (1)-ben definiált mérték inverzrendszer esetén létezik $(T, \mathcal{A}_T, \nu^i)$ gyenge mérték inverzlimesz (lásd a 2.5. Definíciót).

Bizonyítás. Lásd a 2.1. Állítást és a 3.5. Definíciót. □

A 3.1. Állítás ν^i additivitására koncentrál. Általában a mérték inverzlimesz létezése két problémába ütközhet. Az első az inverzlimesz „gazdagsága”, tehát az a kérdés, hogy az inverzlimesz elég sok pontot tartalmazzon (a Heifetz és Samet [11] cikkbeli ellenpélda erre a problémára épül). A második tipikus probléma ν^i σ -additivitása (természetesen a két probléma nem független egymástól).

Az első fajta probléma elkerülésére koordináta leképezéseket használunk (majdnem sorozatmaximalitás, lásd a 2.6. Definíciót és a 2.1. Példát), míg a második típusú probléma kezelése a valószínűségi mértékek valami fajta kompakt regularitását követeli meg.

3.10. *Definíció.* Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített. $\Delta_{MC}(T, \mathcal{A}_T)$ olyan valószínűségi mértékek halmaza, hogy ha $\nu \in \Delta_{MC}(T, \mathcal{A}_T)$, akkor

$$marg_{C_{n-1}} \nu \in \Delta_C(C_{n-1}) \quad \forall n\text{-re.}$$

A következő tétel a fő eredményünk.

3.1. TÉTEL. Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített, ekkor T^i egyetemes típustér, tehát létezik $f : T^i \rightarrow (\Delta_{MC}(T, \mathcal{A}_T), \tau)$ homeomorfizmus.

A tétel bizonyítását szétbontottuk.

A következő segédétel a mértékterek összeillesztéséről szól.

3.1. SEGÉDTÉTEL. Legyenek $(M, \mathcal{A}_M, \mu_M), (N, \mathcal{A}_N, \mu_N)$ valószínűségi mértékterek, és legyen μ additív halmazfüggvény $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(M \times N)$ -en, mely a cillinder halmazok által generált algebra. Legyenek továbbá p_M és p_N koordináta leképezések. Ha $\mu \circ p_M^{-1} = \mu_M$ és $\mu \circ p_N^{-1} = \mu_N$, akkor μ σ -additív.

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy \mathcal{A} elemei felírhatók a következő formában: $\cup_{j=1}^m (M_j \times N_j)$, ahol $m \in \mathbb{N}$, $M_j \in \mathcal{A}_M$, $N_j \in \mathcal{A}_N$. Ismert hogy, μ σ -additív \mathcal{A} -n pontosan akkor, ha tetszőleges $A_n \supseteq A_{n+1}$ halmazzorozatra

$$(\cap_n A_n = \emptyset) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0.$$

Legyen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ tetszőleges halmazzorozat, hogy $A_n \supseteq A_{n+1}$ és $\cap_n A_n = \emptyset$. Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}$ -hez legyen $k_n \in \mathbb{N}$, hogy $A_n = \cup_{j=1}^{k_n} (M_j^n \times N_j^n)$. Legyen

$$F \triangleq \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f(n) \leq k_n \quad \forall n\},$$

akkor

$$\cap_n A_n = \cup_{f \in F} \cap_n (M_{f(n)}^n \times N_{f(n)}^n).$$

Tudjuk, hogy

$$(\cap_n A_n = \emptyset) \implies \left(\cap_n (M_{f(n)}^n \times N_{f(n)}^n) = \emptyset \quad \forall f \in F\text{-re} \right). \quad (3)$$

Osszuk az $\cap_n (M_{f(n)}^n \times N_{f(n)}^n)$ halmazokat két csoportba. Tartalmazza az első csoport, F_1 azokat az f elemeket, ahol $\cap_n M_{f(n)}^n = \emptyset$, és a maradék elemek alkossák a második csoportot F_2 -öt.

Legyen $M_n \triangleq \cup_{f \in F_1} \cap_{j=1}^n M_{f(j)}^j$, ahol n tetszőlegesen rögzített. Minden n -re M_n véges sok \mathcal{A}_M -beli halmazból kapható meg, tehát $M_n \in \mathcal{A}_M$. Könnyen látható, hogy $M_n \supseteq M_{n+1} \quad \forall n$ -re, tehát $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton halmazzorozat. Azt kell még látnunk, hogy $\cap_n M_n = \emptyset$.

A fentiekből következik, hogy

$$\cap_n M_n = \cup_{f \in F_1} \cap_n M_{f(n)}^n.$$

F_1 definíciója miatt $\cap_n M_{f(n)}^n = \emptyset \quad \forall f \in F_1$ -re, tehát $\cap_n M_n = \emptyset$.

$$\cap_{j=1}^n (M_j \times N) \supseteq \cup_{f \in F_1} \cap_{j=1}^n (M_{f(j)}^j \times N_{f(j)}^j) \quad \forall n\text{-re.}$$

μ_M σ -additivitása miatt $\mu_M(M_n) \rightarrow 0$, tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_M(M_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(M_n \times N) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left(\cup_{f \in F_1} \cap_{j=1}^n (M_{f(j)}^j \times N_{f(j)}^j) \right),$$

így

$$\mu \left(\bigcup_{f \in F_1} \bigcap_{j=1}^n \left(M_{f(j)}^j \times N_{f(j)}^j \right) \right) \rightarrow 0.$$

Az F_2 halmazra teljesen hasonlóan látható, hogy

$$\mu \left(\bigcup_{f \in F_2} \bigcap_{j=1}^n \left(M_{f(j)}^j \times N_{f(j)}^j \right) \right) \rightarrow 0.$$

μ additivitása miatt $\forall n$ -re

$$\begin{aligned} & \mu \left(\bigcup_{f \in F_1} \bigcap_{j=1}^n \left(M_{f(j)}^j \times N_{f(j)}^j \right) \right) + \mu \left(\bigcup_{f \in F_2} \bigcap_{j=1}^n \left(M_{f(j)}^j \times N_{f(j)}^j \right) \right) \\ & \geq \mu \left(\left(\bigcup_{f \in F_1} \bigcap_{j=1}^n \left(M_{f(j)}^j \times N_{f(j)}^j \right) \right) \cup \left(\bigcup_{f \in F_2} \bigcap_{j=1}^n \left(M_{f(j)}^j \times N_{f(j)}^j \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Legyen $\epsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, hogy

$$\mu \left(\bigcup_{f \in F_1} \bigcap_{j=1}^n \left(M_{f(j)}^j \times N_{f(j)}^j \right) \right) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq n_1\text{-re,}$$

és $\exists n_2 \in \mathbb{N}$, hogy

$$\mu \left(\bigcup_{f \in F_2} \bigcap_{j=1}^n \left(M_{f(j)}^j \times N_{f(j)}^j \right) \right) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq n_2\text{-re.}$$

Ekkor

$$\mu \left(\bigcup_{f \in F_1} \bigcap_{j=1}^n \left(M_{f(j)}^j \times N_{f(j)}^j \right) \right) + \mu \left(\bigcup_{f \in F_2} \bigcap_{j=1}^n \left(M_{f(j)}^j \times N_{f(j)}^j \right) \right) < \epsilon$$

$\forall n \geq \max\{n_1, n_2\}$ -re. A (4) egyenlőtlenség és ϵ tetszőlegesen választott volta miatt $\mu(A_n) \rightarrow 0$. \square

3.11. Definíció. Legyen $g : \Delta_{MC}(T, \mathcal{A}) \rightarrow T^i$ olyan, hogy $\forall \nu$ mértékhez azt a $t = (\nu_1^i, \nu_2^i, \dots, \nu_n^i, \dots)$ pontot rendeli T^i -ből, ahol

$$\nu_n^i = \text{marg}_{T_{n-1}} \nu \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3.2. SEGÉDTÉTEL. g bijekció.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy g injektív. Ha $\nu \in \Delta_{MC}(T, \mathcal{A}_T)$ adott, akkor ν egyértelműen meghatározza a peremmértékeit, tehát meghatároz egy pontot T^i -ben.

Most azt mutatjuk meg, hogy g szürjektív. A 2.1. Tétel feltételei teljesülnek a (2) mérték inverzrendszerre, hiszen a 2.1. Példa, a kompakt halmazok és a peremmértékek kompakt regularitása biztosítja a feltételeket. Ekkor a 3.1. Állítás miatt alkalmazhatjuk a 3.1. Segédtételt $(S, \mathcal{A}, \nu_1^i)$ -re és a (2) mérték inverzrendszer mérték inverzlimeszeré. A mérték kiterjeszthetősége még az egyértelműséget is biztosítja, így az (1) mérték inverzrendszernek egyetlen mérték inverzlimesze van. Tehát tetszőleges $t \in T^i$ elemhez létezik $\Delta_{MC}(T, \mathcal{A}_T)$ halmazbani elem (a mérték a mérték inverzlimeszen), mely peremmértékei t komponensei. \square

3.12. *Definíció.* Legyen $f = g^{-1}$.

3.3. SEGÉDTÉTEL. f homeomorfizmus.

Bizonyítás. Közvetlen következménye a τ topológia tulajdonságainak. \square

Bizonyítás. [A 3.1. Tétel bizonyítása]

Legyen f definiálva a 3.12. Definícióval. A 3.2. Segédtétel miatt f bijekció.

A 3.3. Segédtétel miatt f homeomorfizmus. \square

3.2. *Megjegyzés.* A 3.1. Tétel típusa egyetemes.

3.3. *Megjegyzés.* A homeomorfizmus létezését csak $(\Delta_{MC}(T, \mathcal{A}_T), \tau)$ -ra, nem $(\Delta_{MC}(T, \sigma(\mathcal{A}_T), \tau)$ -ra bizonyítottuk, mert az utóbbira nem feltétlenül létezik (lásd a 3.1. Példát).

A következő ellenpélda a 3.1. Tételhez fűzött 3.3. Megjegyzést támasztja alá.

3.1. *Példa.* Legyen

$$\Omega \triangleq [0, 1]^{\{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}},$$

tehát az $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$ pontokon értelmezett $[0, 1]$ -be képező függvények halmaza.

$$\text{Legyenek } f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1/n \\ 0 & \text{különben} \end{cases}, \quad \delta_{f_n}(A) = \begin{cases} 1, & \text{ha } f_n \in A \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Dirac-mértékek. Ekkor Ω kompakt metrikus tér, mérhetőségi struktúráját a koordináta leképezések generálják (szorzattopológia), és látható, hogy a Borel és Baire halmazok egybeesnek.

Az is látható továbbá, hogy a koordináta leképezések segítségével megadott algebra (cilinder halmazok) generálja a Borel mérhetőségi struktúrát.

Legyen $f_0 = 0$ konstans függvény, és legyen δ_{f_0} a fent definiáltaknak megfelelően Dirac-mérték. Látható, hogy $\delta_{f_n} \rightarrow \delta_{f_0}$ pontonként az algebra (cilinder halmazok) összes elemén, de a $B = \{f_0\}$ (minden pontban nulla függvény) halmazon, ami nem eleme az algebrának csak a σ -algebrának, $\delta_{f_n}(B) \not\rightarrow \delta_{f_0}(B)$.

A következő példa azt demonstrálja, hogy a mi modellünk mennyiben lehet előrelépés a korábbi modellekhez képest.

3.2. *Példa.* Legyen két játékos, mindkét játékosnak legyen két-két stratégiája. Ez a játék normál formában egy pont \mathbb{R}^8 -ban. Van egy valószínűségi változó, mely meghatározza a játékosok kifizetéseit, tehát a paraméterter legyen $S = \mathbb{R}^{8^{\mathbb{R}}}$ (a paraméterek függvények \mathbb{R} -ből \mathbb{R} -ba). S nem kompakt, nem Polish-tér, így Mertens és Zamir [14], ill. Brandenburger és Dekel [4] modelljei nem működnek ebben az esetben. Legyen S mérhető struktúrája a Borel halmazai. A mi modellünkben a lehetséges vélemények az összes valószínűségi mértékek halmaza S -en, de ezek között lehetnek olyanok, melyek nem kompakt regulárisak, tehát Heifetz [9], Mertens et al. [15] modelljei kevésbé általánosak, mint a miénk.

Két megjegyzés:

3.4. *Megjegyzés.* A Baire halmazok szerepe csupán a modellezni kívánt probléma szempontjából fontos (hasonlóság Heifetz és Samet [10]-hoz). A Baire halmazok helyett mindenhol Borel halmazokat használva a fenti eredmények érvényesek maradnak.

3.5. *Megjegyzés.* Elfogadott az irodalomban (lásd Dekel és Gul [6]), hogy a Bayesi modellekben maga a modell is köztudott a játékosok számára. Ez a mi modellünkben is igaz, de csak a 3.3. Megjegyzés mellett. Ha σ -algebrán szeretnénk látni a homeomorfizmust (ez lenne a „szép” modell), akkor a játékosok számára a modell nem lenne köztudott.

A fent ismertetett modellnek fő „erénye” az, hogy a különböző rendű vélemények terén olyan topológiát definiál, mely független az alacsonyabb rendű vélemények tereinek topológiájától, ráadásul ezen tér a vélemények gazdagabb ábrázolását teszi lehetővé.

Hivatkozások

- [1] AUMANN R. J.: *Agreeing to disagree* Annals of Statistics **4**, 1976, (1236–1239.)
- [2] BOCHNER S.: *Harmonic Analysis and the Theory of Probability*. University of California Press (1955)
- [3] BÖGE W. – T. EISELE: *On solutions of bayesian games*. International Journal of Game Theory **8**, 1979, (193–215.)
- [4] BRANDENBURGER A. – E. DEKEL: *Hierarchies of beliefs and common knowledge*. Journal of Economic Theory **59**, 189–198. (1993)
- [5] CHOKSI J. R.: *Inverse limits of measure spaces*. Proc. London Math. Soc. **8**(Ser 3), 1958, (321–342.)
- [6] DEKEL E. – F. GUL: *Rationality and knowledge in game theory*. Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications (Seventh World Congress of Econometric Society Vol. 1.) 1997, (87–171.)
- [7] HALMOS P. R.: *Mértékelmélet*. Gondolat 1984.
- [8] HARSÁNYI J.: *Games with incomplete information played by bayesian players part I., II., III.* Management Science **14**, 159–182., 320–334., 486–502. (1967–1968)
- [9] HEIFETZ A.: *The bayesian formulation of incomplete information – the non-compact case*. International Journal of Game Theory **21**, 1993, (329–338.)
- [10] HEIFETZ A. – D. SAMET: *Topology-free typology of beliefs*. Journal of Economic Theory **82**, 1998, (324–341.)
- [11] HEIFETZ A. – D. SAMET: *Coherent beliefs are not always types*. Journal of Mathematical Economics **32**, 1999, (475–488.)

- [12] MALLORY D. J. – M. SION: *Limits of inverse systems of measures*. Ann. Inst. Fourier **21**, 1971, (25–57.)
- [13] MILLINGTON H. – M. SION: *Inverse systems of group-valued measures*. Pacific Journal of Mathematics **44**, 1973, (637–650.)
- [14] MERTENS J. F. – S. ZAMIR: *Formulations of bayesian analysis for games with incomplete information*. International Journal of Game Theory **14**, 1985, (1–29.)
- [15] MERTENS J. F. – S. SORIN – S. ZAMIR: *Repeated games part A* CORE Discussion Paper No. 9420, 1994.
- [16] METIVIER M.: *Limites projectives de mesures. Martingales. Applications*. Annali di Matematica **63**, 1963, (225–352.)
- [17] PINTÉR M.: *Type space on a purely measurable parameter space*. Economic Theory **26**, 2005, (1239–139.)
- [18] RAO M. M.: *Measure Theory and Integration*. John Wiley és Sons, 1987.

(Beérkezett: 2005. január 20.)

PINTÉR MIKLÓS
BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM
MATEMATIKA TANSZÉK
1093 BUDAPEST, FŐVÁM TÉR 13-15.
miklos.pinter@uni-corvinus.hu

A GAME THEORETIC APPLICATION OF INVERSE LIMIT

MIKLÓS PINTÉR

It is a usual problem of modeling games with incomplete information to handle the hierarchies of beliefs. It is our aim to construct a type space introduced by Harsányi, and to show the connection between the concept of hierarchies of beliefs and the idea of inverse system. Therefore, we give an existence theorem for measure inverse limit, which is more general than the previously known theorems, and by this theorem we build a complete universal type space based on a purely measurable parameter space (i.e. non topological).

DINAMIKUSAN KEZELHETŐ STATISZTIKAI MODELLEK IRODALMI MŰVEK SZÓALAKJAINAK VIZSGÁLATÁRA

CSERNOCH MÁRIA

Munkánk során arra vállalkoztunk, hogy a szavak véletlenszerű válogatásával egy olyan dinamikusan kezelhető statisztikai modellt építsünk, amely jó közelítéssel képes az újonnan megjelenő szóalakok természetes nyelvi szövegekben megfigyelt viselkedését visszaadni. Modellünk építéséhez az eredeti mű szóalakjainak gyakoriságát használtuk, tehát az így felállított modell segítségével előállított mesterséges szövegek szóalakjai ugyanolyan gyakoriságokkal rendelkeztek, mint értelmes megfelelőjük az eredeti szövegben. Három modellt is építettünk, amelyek közül az első a korábban ismertetett és statikus modellek megépítéséhez használt, a szavak polinomiális eloszlását feltételező elképzeléseket követte. Bár ezzel a modellel a korábbi vizsgálatokban elért pontosságot nem tudtuk javítani, sikerült azonban az újonnan megjelenő szóalakok számát leíró görbékre jellemző trendeket visszaadni. A második modellel, még mindig ezt az eloszlást feltételezve, az előzőnél már jobb közelítést sikerült elérni. A harmadik módszer, amely az eredeti szövegek legjobb közelítését adta, a szavak hipergeometrikus eloszlását feltételező modell volt. Ez utóbbi modell alkalmasnak bizonyult mind angol, mind magyar nyelvű szövegek modellezésére, amely mutatja, hogy az újonnan bevezetett szavak megjelenését nem befolyásolják egy nyelv grammatikai eszközei, a szintaktikai és szemantikai megkötések.

1. Bevezetés

A korábban szinte kizárólagosan alkalmazott szubjektív megítéléssel szemben, a statisztikai módszerek alkalmazása lehetővé teszi irodalmi művek számszerűsített (objektívebb) feldolgozását. A számítógép, illetve a számítógéppel segített szövegelemzés jelenti, ahogy sok más probléma esetén is, a szövegek korábban megoldhatatlannak tűnő vizsgálatát. A szóalakok, mint egy lehetséges minimális egység számának pontos ismeretében további olyan formulák határozhatók meg, amelyek képesek a szövegek egy-egy tulajdonságának a jellemzésére. Lehet arról vitatkozni, hogy a nyers adatok/szóalakok mennyire alkalmasak egy irodalmi mű stilisztikai leírására, de úgy tűnik, hogy ezek statisztikai vizsgálatánál mostanáig nem sikerült megbízhatóbb módszert találni az irodalmi művek nyelvi gazdagságának leírására [11].

A számítógépes nyelvészet mozgatója a kezdetektől a gépi fordítás megvalósítása (machine translation) iránti igény volt, mivel már a számítógépek megjelenése

előtt is keresték azokat a módszereket, amelyekre az egyhangú munkát végző fordítók régóta várták a megoldást. Szemben a korábbi elképzelésekkel, már az ötvenes évek végére megfogalmazódott, hogy a szavak szó szerinti átírása nem adhat megfelelő kimenetet egy fordítási problémára [12]. A hatvanas évek közepére az is nyilvánvalóvá vált, hogy a számítógép még sokáig nem lesz képes emberi felügyelet nélkül jó minőségű fordítást készíteni egy szövegről [8], [20], [21].

Az ezredfordulóhoz közeledve, amikor a számítógépes nyelvészet már nem kizárólag az angol nyelvterületre korlátozódott, ismét felerősödött a fordítás iránti igény. A gépi fordítást ugyan nem, de a gépi fordítás során felmerülő számos részfeladatot sikerült megoldani. A részfeladatok a későbbiekben a számítógépes nyelvészet egy-egy rész tudományává nőttek ki magukat.

Nyelvek és szövegek matematikai modellezéséhez is a gépi fordítások vizsgálata adott nagy lendületet. Kezdetben ezeket az eredményeket a titkosításban és a titkosítás megfejtésében (kódolás feltalálása), különösen a számítógépek biztosításánál, széles körben alkalmazták. Ennek elméleti kidolgozását C. Shannon amerikai matematikus végezte el [9]. Ezeknél a vizsgálatoknál az egységnek egy betűt (jelet) tekintenek.

Korszakalkotó jelentőségűnek mondható Markov modellje [1], [16], amely szintén egymást követő szimbólumok nem függetlenül történő kiválasztására adott algoritmust. Ezt az eljárást tovább módosítva napjainkban a Markov modell leginkább statisztikai alapon működő szófaj meghatározások (Part of Speech, POS) algoritmusaként használatos.

Szövegek teljes számítógépes feldolgozása egyelőre nem megoldott. A szövegek bizonyos tulajdonságait leírni képes részeredményekhez jutunk, ha egyszerűsítjük modelljeinket, pl. az általunk választott jellemző (paraméter) kiszámolásával. A szövegre jellemző bizonyos számszerű paraméterek vizsgálatára példa az a nyilvánvaló egyszerűsítés, hogy – szemben egy értelmes nyelvi szöveggel – a modellben a szavak egymástól függetlenül jelenjenek meg (randomness assumption). Ez annyit jelent, hogy figyelmen kívül hagyunk mindenféle szintaktikai, szemantikai és szövegszerkezeti megkötést [7].

Napjainkra számos olyan eredmény látott napvilágot, amely ezzel az egyszerűsítéssel él (ún. lexikai statisztikai modellek; összefoglaló értékelés [6]-ban található). Nyilvánvaló, hogy a szöveg visszaállítására a szavakat véletlen módon válogató modellek nem lehetnek alkalmasak, de nem is ez a céljuk. A véletlen válogatás természetesen következménye ugyanis, hogy az említett vizsgálatoknál különbség van az eredeti „értelmes” szöveg és a modell között.

A korábban megjelent lexikai statisztikai modellek valamennyien statikus modellek voltak [6]. A szavak egymástól független megjelenését feltételezve, a szókészlet méretének és egy mű szógazdagságának jellemzésére zárt, matematikai képletekkel leírható megoldást kerestek. Ilyen képlet azt jelentette, hogy sikerült egy, a szöveg egészére jellemző, annak egy bizonyos tulajdonságát leíró paramétert (vagy paramétereket) találni. Ezek a modellek, következésképpen, nem adják vissza sem az eredeti szövegben jelenlévő trendeket, sem a szezonálisakat.

A lexikai statisztikai modellek elsősorban a szókészlet nagyságára és gazdag-

ságára, valamint a szóalakok előfordulási gyakoriságára próbáltak meg összefüggéseket találni. A szóalakok gyakorisági eloszlásának egyik legkarakterisztikusabb jellemzője, hogy nagyon magas a ritkán előforduló szavak száma, ezért ezek az eloszlások a nagyszámú, de ugyanakkor rendkívül alacsony gyakoriságú ritka eseményeket leíró (Large Number of Rare Events (LNRE)) osztályba tartoznak [13]. Mivel az LNRE típusú eloszlások számítógépes modellezésére még kevés a sikeres és gyors algoritmus az elméletileg megszámlálható eredményekkel végezhetünk összehasonlítást. A korábbi statikus modellek közül azok adták a legjobb közelítéseket, amelyek azt feltételezték, hogy egy szöveg szavai polinomiális eloszlást követnek. Ezek a modellek alkalmasnak bizonyultak arra, hogy vizsgálják a szavak nem-független megjelenésének forrásait. Segítségükkel, többek között, arra a következtetésre jutottak [4], [5], [6], hogy bár a mondaton belüli kötöttségek a legnyilvánvalóbbak, mégsem ezek a legfőbb forrásai a teljes szöveg szavai nem-véletlenszerű megjelenésének. Sokkal inkább meghatározóak a bekezdés vagy szövegszinten bekövetkező változások (ezekre viszont nincs matematikai modell).

Vizsgálataink hosszú távú célja főként angol és magyar nyelvű szövegek egy olyan speciális tulajdonságának kiszámítása, amelynek segítségével részben választ kaphatunk a fenti problémára. Arra keressük tehát a választ, hogy az írók mikor, a szöveg mely pontján találják indokoltnak olyan szavak bevezetését, amelyek korábban nem szerepeltek az adott műben. Ehhez szükség van egy olyan dinamikus vizsgálati modell kidolgozására, amely mind az angol, mind a magyar szövegekben az újonnan megjelenő szóalakok számának viselkedését a lehető legjobb közelítéssel képes visszaadni. Tekintettel arra, hogy a szavak számának pontos meghatározása nem volt célunk – azt vizsgáltuk csak, hogy mikor és mennyi új szó jelenik meg –, egyszerűsítésként megengedhető volt a statikus modellek megépítésénél is felhasznált randomness assumption alkalmazása.

Ugyanezen elméleti alapon olyan dinamikus modell megépítését tűztük ki célul, amely szemben a statikus modellekkel, az eredeti szövegben meglévő trendek és szezonális leírására is alkalmas lehet meghagyva a függetlenség feltételét. Angol szövegekre azért esett a választás, hogy eredményeinket össze tudjuk hasonlítani a korábban kapott, a szókészlet méretére vonatkozó, statikus modellek alapján kapott eredményekkel. Magyar szövegek ilyen jellegű számítógépes feldolgozására, tudomásunk szerint, ez idáig nem történtek kísérletek. Érdemesnek tűnt tehát megvizsgálni, hogy egy agglutináló nyelv [19], [15], [14], [20] esetén hogyan alkalmazhatóak a szavak függetlenségét feltételező modellek.

2. Módszerek

A szövegek feldolgozása, kiértékelése, modellezése a saját fejlesztésű, Windows operációs rendszerek alatt futtatható, *DyMoCASAT*-tel (Dynamic Model for Computer Aided Statistical Analysis of Texts) történt. Mivel a végső cél a szövegekben előforduló különböző szóalakok vizsgálata volt, ezért a feldolgozás alapját a szó defi-

niálása, a szöveg szavakra bontása képezte. A feldolgozás első lépéseként definiálni kellett azt a karakterkészletet (ábécét), amellyel a program dolgozni fog, amely alapján el fogja dönteni, hogy a szöveg mely karaktersorozata tekinthető szónak. Mivel a szövegeken előfeldolgozást nem végeztünk, ezért vizsgálataink alapegysége a szóalak (két elválasztó karakter közötti összefüggő karakter sorozat) lesz.

2.1. Szövegek blokkokra tördelése

A szövegek feldolgozását meg kellett előzze a különböző szóalakok számának és megjelenési helyének pontos meghatározása. Mindezt a *DyMoCASAT* végezte.

Vezessük be a következő jelöléseket:

N	a szöveg (mű) hosszúsága; szavainak, a szövegszók nak a száma;
$V(N)$	az N szövegszó hosszúságú szöveg különböző szavainak, a szóalakok nak a száma ($V(N) \leq N$);
ω_i	N szövegszó hosszúságú szöveg i -edik (leggyakoribb) szava;
$f(i, N)$	N hosszúság esetén az ω_i szó gyakorisága;

az i -dik leggyakoribb ω_i szó $\{P(\omega_i) = p_i\}$ valószínűség eloszlása teljes, ha

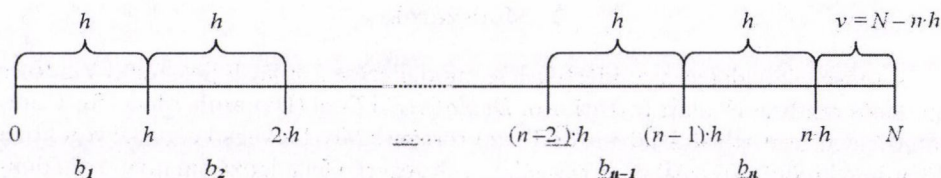
$$\sum_{i=1}^{V(N)} p_i = 1.$$

Az N szövegszó hosszúságú szöveget feldaraboltuk egyenlő hosszúságú, azonos számú szövegszót (h) tartalmazó intervallumokra, blokkokra (b_i).

b_i	blokkra bontjuk a szöveget, ahol minden blokk azonos számú szövegszót (h) tartalmaz
h	a blokkok hossza
n	blokkok száma

$$b_i, i = 1, \dots, n, \quad \text{ahol } n = \left\lfloor \frac{N}{h} \right\rfloor. \quad (1)$$

$$N \geq n \cdot h; \quad N - n \cdot h = \nu. \quad (2)$$



A szövegek ily módon történő feldolgozásánál mindig számolni kell valamennyi veszteséggel, mivel a szöveg végének csonkításakor (az N/h hányados egészrésznének a képzése miatt) a szöveg n . blokkot követő részének szavai (ν) nem kerülnek feldolgozásra.

$$\nu = N - h \cdot \left\lfloor \frac{N}{h} \right\rfloor. \quad (3)$$

$\nu = 0, 1, \dots, h - 1, \Pr(\nu_j = i) = \frac{1}{h}$, a „veszteség”.

Az így bevezetett ν egy egyenletes eloszlású véletlen szám (valószínűségű változó) a $0 \leq \nu < h$ intervallumon [10], [17], [23]. Ennek megfelelően a feldolgozásra nem kerülő szavak száma, a szöveszteség várható értéke a lehetséges értékek szám-tani közepe: $\bar{\nu} = \frac{h}{2}$.

Regények esetén, ahol N , a szövegszók száma általában meghaladja 40 000-et és nem több, mint 400 000 (a feldolgozott művek közül egyedül Tolsztoj: Háború és Béke című műve tartalmazott több, mint 400 000 szövegszót) az átlagos relatív veszteség (ν_r)

$$\frac{\bar{\nu}}{400\,000} < \nu_r < \frac{\bar{\nu}}{40\,000},$$

azaz közelítőleg 10^{-4} és 10^{-3} közé esik.

2.2. Szavak tárolása az egyes blokkokban

A blokkok hosszúsága az esetek többségében száz szövegszó hosszúságúra volt állítva, tehát $h = 100$. A végső cél az volt, hogy minden egyes száz szövegszó hosszúságú blokkhoz egy egész számot rendeljünk, az adott blokkban újonnan bevezetésre került szóalakok számát y_i ($y_i, i = 1, \dots, n$). Az y_i definíciójából következik, hogy bármely i -re

$$0 \leq y_i \leq h.$$

Tárolásra azonban nemcsak ezek az értékek kerültek, hanem minden egyes szó szövegen belüli pozíciója, a blokk sorszámaival és a szó ezen blokkon belüli előfordulási gyakorisága is. Valamennyi érték tárolása szöveg fájlokban (.txt) történt. A program legfeljebb annyi szöveg fájlt hozott létre az aktuális könyvtárban, ahány karakterből áll a karakter készlet ($k, k = 'a', \dots, 'z'$). (Az aktuális könyvtár beállítás a programon belül történik, alapértelmezés szerint a WINDOWS\TEMP könyvtár.) A fájlok a szavak kezdőbetűinek az ASCII kódja alapján lettek azonosítva.

Minden egyes szöveg fájl annyi bekezdést (s_k) tartalmaz ahány azzal a karakterrel kezdődő szót (m_k) talált a program a szövegben.

$$s_k = 1, \dots, m_k, \text{ ahol } m_k = \max('k \dots'), k = 'a', \dots, 'z'.$$

Az egyes bekezdések pedig legfeljebb n számú karakterből állhatnak (1-3). A bekezdéseken belül az egyes pozíciókon vagy a szóalak előfordulásának számát vagy annak hiányát jelöltük az adott sorszámu blokkban.

A különböző szóalakok tárolására egy hármas indexű elem ($X = \{x_{ksi}\}$, k, s, i) alkalmas, ahol az egyes elemek a különböző szóalakokat jelölik, azok pontos megjelenési helyével, k jelöli az ábécé betűit, s a szó ábécébéli sorrendjének a számát az adott betűn belül, míg i a blokkok sorszáma (1. és 2. táblázat):

$$N = \sum_{k='a'}^{z'} \sum_{s=1}^{m_k} \sum_{i=1}^n x_{ksi}.$$

1. táblázat. Az 'a' és 'b' karakterrel kezdődő szavak elrendezése. A fájlok első bekezdése (a tömb első sora) az ASCII kódok alapján a legelső 'a'-val, illetve 'b'-vel kezdődő szavakat tartalmazza, míg az utolsó bekezdések (a táblázat utolsó sora) ezen elrendezés szerinti utolsó szavakat. Az egyes fájlokban belüli bekezdések száma változó, tehát m_a várhatóan nem egyenlő m_b -vel.

Az 'a' karakterrel kezdődő szavak elrendezése					
	1	2	3	...	n
1	x_{a11}	x_{a12}	x_{a13}		x_{a1n}
2	x_{a21}				
3					
...					
m_a					

A 'b' karakterrel kezdődő szavak elrendezése					
	1	2	3	...	n
1	x_{b11}	x_{b12}	x_{b13}		x_{b1n}
2	x_{b21}				
3					
...					
m_b					

2. táblázat. A szavak előfordulását tároló háromdimenziós tömb 'a' és 'b' kétdimenziós lapjai értékes jegyekkel feltöltve egy lehetséges minta alapján.

Az 'a' karakterrel kezdődő szavak elrendezése értékes jegyekkel					
	1	2	3	...	n
1	2	1	0	0	1
2	0	0	1	0	0
3	1	0	0	0	2
...					
m_a	0	1	0	0	0

A 'b' karakterrel kezdődő szavak elrendezése értékes jegyekkel					
	1	2	3	...	n
1	0	0	1	1	0
2	2	1	1	2	2
3	0	0	0	0	1
...					
m_b	0	0	1	0	0

Az újonnan megjelenő különböző szóalakok meghatározásához azonban nincs szükségünk sem a szavak előfordulási gyakoriságára, sem az összes előfordulásra. Egy adott szóalak esetén csak az első előfordulását kell megjegyezni, valamint össze kell számlálni a különböző szóalakok első előfordulását egy adott blokkon belül.

Az egyes blokkokban újonnan bevezetésre kerülő különböző szóalakok számát, az átalakított XT tömbben (3. táblázat) a blokkonkénti (a táblázat oszlopai) T -k száma adja, ha összegezzük ezeket valamennyi karakterre.

$$N = \sum_{k='a'}^{z'} \sum_{s=1}^{m_k} x t_{k s i}. \quad (4)$$

3. táblázat. Az egyes blokkokban az újonnan megjelenő szóalakok (y_i) megszámlálásához az egyes szavak első előfordulását kell megtalálnunk, és az így kapott pozíciók alapján meghatározhatóak ezen y_i értékek.

Az 'a' karakterrel kezdődő szavak első megjelenése						A 'b' karakterrel kezdődő szavak első megjelenése					
	1	2	3	...	n		1	2	3	...	n
1	T					1			T		
2			T			2	T				
3	T					3					T
...						...					
m_a		T				m_b			T		

A számok ábrázolása azonban nem tízes számrendszerben történt, mert előfordulhat, hogy egy szó egy blokkon belül tíznél több alkalommal fordul elő. A számokat ($x_{k s i}$) ASCII kódok helyettesítik $x + 63$ formátumban. Ennek megfelelően: $1 \rightarrow A$; $2 \rightarrow B$; stb (1. ábra).

3. Eredmények

3.1. Az újonnan megjelenő szóalakok ábrázolása DyMoCASAT-tel

Kutatásaink elsődleges célja az volt, hogy angol és magyar nyelvű szépirodalmi művekben vizsgáljuk a különböző szóalakok megjelenésének szabályszerűségeit, ezért a program egyik feladata, hogy olyan ábrát készítsen, amellyel szemléltethető, hogy az egyes blokkokban hány új szó jelenik meg az előző blokkokhoz képest. A viszonyítási pont mindig az éppen soron következő blokk, amit az addig vizsgált blokkok összességéhez hasonlítunk. Két ábrázolási módot is használtunk:

- az újonnan bevezetett szóalakok száma az adott blokkban (y_i) (2. A, 3. C, 3. D és 4. ábra),
- az addigi szóalakok száma (kumulatív szókészlet), a teljes szókészlet nagysága (Y_i) (2. B, 3. A, 3. B, 6., 7. és 8. ábra).

A szövegek újonnan bevezetésre kerülő szóalakjainak számát ábrázoló görbék (2. A, 3. C és a 4. ábra bal oldali görbéi) jól szemléltetik a tendenciát, miszerint a szövegben előre haladva csökken azoknak a szavaknak a száma, amelyek a szöveg egy későbbi pontján kerülnek bevezetésre. Az ábrák azonban azt is mutatják, hogy vannak a szövegnek olyan szeletei, amelyekben ez a csökkenő tendencia visszafordul, és váratlanul megnő az addig nem használt szavak száma. Az ábrákról az is leolvasható, hogy nem a szöveg hossza az, amely befolyásolja, hogy mennyi az újonnan bevezetett szavak száma, hanem az, hogy a szövegnek mely pontján járunk. A váratlan kiugrásoktól eltekintve igaz, hogy ha i, j a blokkok sorszámát jelöli és $i < j$, akkor $f(i) > f(j)$, valamint az is, hogy $f_1(i) \sim f_2(i)$ és $f_1(j) \sim f_2(j)$, ha f_1 és f_2 két azonos nyelven írott szöveg újonnan bevezetett szóalakjainak a számát mutatja.

Magyar nyelvű szövegek vizsgálatánál azt találtuk, hogy az újonnan bevezetett szóalakok száma magasabb az egyes blokkokban, mint azt angol szövegek esetén tapasztaltuk (3. D és a 4. ábra jobb oldali görbéi). Ez az eltérés a két nyelv sajátosságaiból következik. A magyar az agglutináló nyelvek csoportjába tartozik, míg az angolt, ha nem is egyértelműen, de leginkább az izoláló nyelvek csoportjába lehet sorolni. A blokkonkénti magasabb szóalakszámoknak egyenes következménye, hogy azonos hosszúságú angol és magyar szövegek esetén a magyar szövegek szókészlete, a szóalakok össz-száma magasabb, mint angol szövegek esetén (3. B, 8. A, 8. B ábra).

3.2. A szavak további feldolgozása

A fent ismertetett módszer – a szavak szövegfájlokban történő tárolása – további feldolgozásra is alkalmassá teszi a kapott értékeket. Ezen lehetőségek közül a következők a leggyakrabban használtak:

- a szóalakok számából meghatározható, hogy az adott szövegben hány különböző szóalak található,
- lekérdezhető és külön fájlban tárolható, ezen túl, a szavak gyakorisága és relatív gyakorisága is számuk szerint csökkenő, illetve ábécé rendben,
- az egyes blokkok szövege,
- az egyes blokkokban újonnan megjelenő szóalakok, illetve
- az egyszer előforduló szavak (hapax legomena) listája blokkonként.

3.3. Dinamikusan kezelhető statisztikai modellek

A szavak előfordulási gyakoriságán alapuló dinamikus modellek, hasonlóan a statikus modellekhez, élnek azzal a nyilvánvaló egyszerűsítéssel, hogy a szavak egymástól függetlenül jelennek meg egy szövegben. Szemben azonban a statikus modellekkel képesek visszaadni a szövegben meglévő trendeket.

Éppen ezért egyik típusú modellnél sem az a cél, hogy bebizonyítsuk, hogy a szavak egymástól függetlenül jelennek meg a szövegben, hanem sokkal inkább annak a vizsgálata, hogy mennyiben tér el egy szöveg a modelltől és mivel magyarázhatóak ezek az eltérések.

Egy, a szavak előfordulási gyakoriságán alapuló mesterséges szöveg létrehozásánál elsőként a szókészlet nagyságát célszerű meghatározni. Ez egy természetes elvárás, mivel az írók is ezt teszik, amikor létrehozzák műveiket. Ennek megfelelően az tűnik ésszerűnek, hogy vesszük az író szókészletét, és ezt a szókészletet tekintve kiindulási halmaznak, válogatunk belőle, ahogy azt az író is tette. Az író teljes szókészletének meghatározása azonban szinte lehetetlen feladat. Még nagyon termékeny írók valamennyi művét feldolgozva sem állíthatjuk biztosan, hogy hozzájutottunk a teljes szókészlethez. Ez két okkal magyarázható. Az egyik, hogy a szókészletünk folyamatosan változik, így nem rendelkezünk azzal az információval, hogy a kiválasztott mű írásakor mi volt az író aktuális szókészlete [18], [22]. A másik magyarázat, hogy az aktív és a passzív szókészlet különböző méretű, míg az ismert művek feldolgozása is csak az aktív szókészletről ad információkat. Valamennyiünk számára nyilvánvaló azonban, hogy a válogatás nemcsak kizárólag az aktív szókészletből történhetett, hanem a jóval nagyobb, a két halmaz uniójából összeállt halmaz elemeiből.

Vizsgálataink elvégzéséhez két modellt építettünk. Mindkét modell dinamikus, hiszen a szavak ténylegesen végrehajtott statisztikailag független válogatásán alapszik. Az első az urna modellt alapul vevő statikus modell [3], [4], [6] mintájára készült. Az említett szerző a szavak válogatását visszatevéses válogatással modellezte, így az N méretű mintában a p_i valószínűségű ω_i szóalakok előfordulása (N, p_i) polinomiális (speciális esetben binomiálisra redukált) eloszlást mutatott. A másik modellünk az egyes szóalakok (ω_i) számára vonatkozóan visszatevés nélküli válogatáson alapszik, így egy hipergeometrikus eloszlást eredményező dinamikus modell.

3.3.1. Visszatevéses válogatás ($P1$)

Ha $f(i, N)$ az ω_i gyakorisága az N szövegszó hosszúságú szövegben, akkor a szóalakok megjelenése modellezhető egy polinomiális eloszlással [17] a következőképpen.

Legyen $A_1, \dots, A_{V(N)}$ egy teljes eseményrendszer, és

$$p_i = P(A_i) > 0, \quad i = 1, \dots, V(N),$$

továbbá ismételjünk egy kísérletet N -szer $\left(\sum_{i=1}^{V(N)} p_i = 1\right)$ egymástól függetlenül. Jelölje ω_i az A_i esemény bekövetkezéseinek a számát. Ekkor $\omega_1, \dots, \omega_{V(N)}$ együttes eloszlása N és $p_1, \dots, p_{V(N)}$ paraméterű polinomiális eloszlás:

$$\omega_1 = k_1, \omega_2 = k_2, \dots, \omega_{V(N)} = k_{V(N)} \quad k_1 + k_2 + \dots + k_{V(N)} = N,$$

$$\begin{aligned}
 P \{ \omega_1 = k_1, \omega_2 = k_2, \dots, \omega_{V(N)-1} = k_{V(N)-1}, \omega_{V(N)} = k_{N-(k_1+\dots+k_{M-1})} \} = \\
 = \frac{N!}{k_1! \dots k_{V(N)-1}! (N - k_{V(N)})!} p_1^{k_1} \dots p_{V(N)-1}^{k_{V(N)-1}} p_{V(N)}^{N-(k_1+\dots+k_{V(N)-1})}, \\
 \sum \frac{N!}{k_1! \dots k_{V(N)-1}! (N - k_{V(N)})!} p_1^{k_1} \dots p_{V(N)-1}^{k_{V(N)-1}} p_{V(N)}^{N-(k_1+\dots+k_{V(N)-1})} = 1
 \end{aligned}$$

Esetünkben természetesen a kísérlet egy tetszőleges szó kiválasztása a szövegből. Ha egy szót megkülönböztetünk a többitől speciálisan a p_{i_1} paraméterű binomiális eloszlást [17] kapjuk:

$$\begin{aligned}
 P \left\{ \omega_{i_1} = k_{i_1}, \omega_{i_2} + \dots + \omega_{i_{V(N)-1}} = k_{N-(k_{i_2}+k_{i_3}+\dots+k_{i_{V(N)-1}})} \right\} = \\
 = \binom{N}{k_{i_1}} p_{i_1}^{k_{i_1}} (1 - p_{i_1})^{N-(k_{i_2}+\dots+k_{i_{V(N)-1}})}.
 \end{aligned}$$

A modell megépítéséhez az eredeti mű szóalakjainak gyakoriságát használtuk fel. Ennek megfelelően először az egyes szavak gyakoriságát ($f(j, N)$; a j -edik szóalak gyakorisága az N szövegszót tartalmazó szövegben), majd a relatív gyakoriságát ($frel(j, N)$) határoztuk meg:

$$frel(j, N) = \frac{f(j, N)}{N}.$$

A szóalakok relatív gyakoriságának ismeretében meg tudtuk határozni az adott eloszláshoz tartozó empirikus eloszlásfüggvényt ($Femp$, szokás kumulatív empirikus eloszlásfüggvénynek is nevezni), ahol minden egyes szóalaknál a relatív gyakoriságok összege szerepel:

$$Femp(j) = \sum_{i=1}^j frel(i, N).$$

Ezen relatív gyakoriságok és a hozzájuk tartozó empirikus eloszlás függvény (5. ábra) alapján állítottunk elő egy mesterséges szöveget, amelyben a szóalakok előfordulási gyakorisága megegyezett az eredeti szöveg szóalakjainak relatív gyakoriságával.

Feltételezve, hogy a könyv szóalakjai egymástól függetlenül adott valószínűséggel követik egymást, valamint azt, hogy egy szó felhasználása nem jelenti a szó törlését a szókészletből az eloszlás függvény értékkészletéből véletlenszerűen válogattunk elemeket. A válogatáshoz a számítógép beépített RANDOMIZE és RANDOM függvényét használtuk. A RANDOMIZE függvény inicializálását nagy prímeikkel végeztük. Azért választottuk ezt a módszert a számok előállítására, mert így láttuk biztosítottak, hogy a számok előállítására használt algoritmus független a szövegben előforduló szavak rendszerétől [2]. Ezt az eljárást annyiszor ismételtük meg, ahány szövegszót tartalmazott az eredeti szöveg. Ennek az eljárásnak azonban az a hátránya, hogy nem pontosan annyi különböző szóalakot állít elő, mint amennyit az eredeti szöveg tartalmazott. A 6-8. ábrákon az eredeti szöveg szókészletének nagyságát ($V(N)$) a folyamatos, míg a polinomiális eloszlást feltételező

modellel előállított szöveg szókészletének nagyságát ($EP1V(N)$; 6. és 7. A ábrák) a szaggatott vonal jelöli.

3.3.2. Visszatevéses válogatás, módosított modell (P2)

A szóalakok számának az eredetitől való eltérése az egyszer előforduló szavak (hapax legomena), $V(1, N)$ esetében volt a legnagyobb. Ahhoz, hogy az eredeti és a mesterséges szöveg szóalakjainak száma közötti eltérést csökkenteni tudjuk a modellt módosítani kellett. Ez a legegyszerűbben úgy történhet meg, hogy megnöveljük azoknak a szóalakoknak a számát, amelyekből a válogatás történt. Ezt azonban úgy kellett elvégezni, hogy az eredeti könyvből nyert relatív gyakoriságok ne változzanak meg. A modell módosított verziójában megnöveltük az egyszer előforduló szavak számát csökkentve ezzel azok relatív gyakoriságát, úgy, hogy az összes egyszer előforduló szavak relatív gyakorisága ne változzék (6. és 7. A ábra).

Míg az eredeti műben és modell első verziójában az összes egyszer előforduló szó relatív gyakorisága

$$\text{rel}(V(1, N)) = \frac{V(1, N)}{N},$$

addig a módosított modellben az egyszer előforduló szavak relatív gyakorisága

$$\frac{1}{N \cdot \left(1 + \frac{V2}{V(1, N)}\right)} = \frac{V(1, N)}{N \cdot (V(1, N) + V2)},$$

kifejezéssel adható meg, ahol $V2$ a hozzáadott szóalakok száma.

A módosított modell alapján előállított szöveg szókészletének nagyságát ($EP2V(N)$) a 6. és 7. A ábrán a pontozott görbe jelöli. Az eltérés az eredeti és a mesterséges szöveg között azonban nem lényegesen kisebb, mint a korábban használt statikus modellek esetén ([3], [4], [6]; 6. ábra). Az eredeti és a mesterséges szöveg közötti különbség csökkentésére ezért egy újabb modellt építettünk.

3.3.3. Visszatevés nélküli válogatás (H)

Ebben a modellben a szövegszókat egy vektor komponenseiként tároltuk, majd az így tárolt elemeket véletlenszerűen válogattuk, de ebben az esetben visszatevés nélkül. A már felhasznált szövegszó nem került vissza a vektorba miután lejegyeztük, hogy melyik volt kihúzva. Ezt a módszert használva megoldódott az a korábbi probléma, hogy az eredeti és a mesterséges szöveg különböző szóalakjainak a száma nem egyezett meg, ugyanis pontosan annyi szóalak volt tárolva, ahányat az eredeti szöveg tartalmazott, pontosan annyiszor, ahányszor az eredeti szövegben előfordultak.

Ha egy olyan urnát feltételezünk, amelyben N golyó (a szóalakok száma) – köztük M egyszínű (egy szóalak) – van, n -et találmra kihúzva (n elemű mintát

véve) éppen k adott színűt találunk azok közt [17]. Ezeket a valószínűségeket

$$P_k = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{N}{n} \binom{N-M}{k}} = \frac{(n!)^2}{(n-k)!} \frac{(N-n)!}{N!} \frac{(N-M-k)!}{(N-M)!}$$

szolgáltatta.

A visszatevéses és visszatevés nélküli válogatással készült modellek alapján előállított mesterséges szövegek és az eredeti szöveg közötti eltéréseket a 7. és 8. ábrákon mutatjuk be. Figyeljük meg, hogy a visszatevés nélküli válogatás még a módosított ($P2$) polinomiális eloszláson alapuló modellnél is jobb közelítést adta az eredeti szövegeknek. Különösen szembetűnő ez a különbségi görbéken ($V(N) - EP2V(N)$, illetve $V(N) - EHV(N)$; 7. és 8. ábra belső görbék).

A visszatevés nélküli válogatással készült modell nemcsak az angol, de a magyar nyelvű szövegek szókészletének közelítő leírására is alkalmasnak bizonyult, függetlenül a két nyelv közötti eltérésektől. A 7. B és a 8. ábrák belső görbéi mutatják, hogy annak ellenére, hogy magyar szövegekben magasabb a különböző szóalakok száma, az eredeti szöveg és a modell között nem nagyobb az eltérés, mint angol nyelvű szövegek esetén.

4. Eredmények összefoglalása

Kutatásaink során főként angol és magyar nyelvű irodalmi művekben vizsgáltuk a különböző szóalakok megjelenését. Mivel a magyar agglutináló nyelv ezért kettő, de inkább több morfémát (a szótő és a hozzácsatolt egy vagy több képző és/vagy rag) tartalmazó szóalakok a gyakoriak. Ezzel szemben angol nyelvben a morfémák jelentős hányada önálló egységként, szóalakként jelenik meg. Ennek következménye, hogy angol és magyar nyelven írott szövegek szövegszóinak és szóalakjainak száma eltérő. Megegyező hosszúságú (N) angol és magyar nyelvű szövegeket összehasonlítva a felhasznált különböző szóalakok száma ($V(N)$), az egyszer előforduló szavak száma ($V(1, N)$) magyar nyelvű szövegekben nagyobb, aminek következménye, hogy az egyes szavak relatív gyakorisága kisebb a magyar nyelvű szövegekben.

Az angol és a magyar nyelv közötti nyilvánvaló eltérések ellenére egy olyan dinamikus modell létrehozását tűztük ki célul, amely alkalmas lehet bármelyik nyelven írt szöveg újonnan bevezetett szóalakjai viselkedésének leírására.

A modell megépítésénél azzal, a korábbi statikus modelleknél is használt feltételezéssel éltünk, hogy a szavak polinomiális eloszlást követnek egy szövegen belül. Azt találtuk, hogy az így létrehozott dinamikus modell közel olyan hibával dolgozik, mint a statikus modellek, de ugyanakkor képes visszaadni a szövegben jelenlévő trendeket is, amit a statikus modellek zárt formulái nem tudtak visszaadni.

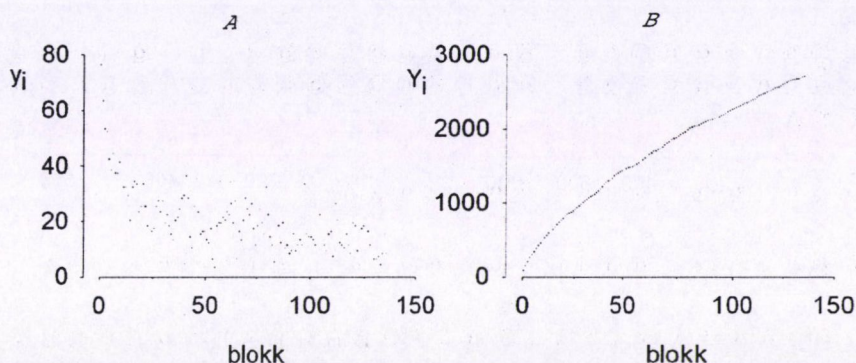
A modell további fejlesztése során, amelyben a szavak a polinomiális eloszlása helyett azok hipergeometrikus eloszlását feltételeztük, sikerült előállítani egy olyan

modellt, amely megőrizte az előzőnek azt a tulajdonságát, hogy a szöveg trendjeit visszaadja, ugyanakkor az eredeti szövegnek egy jobb közelítését kaptuk.

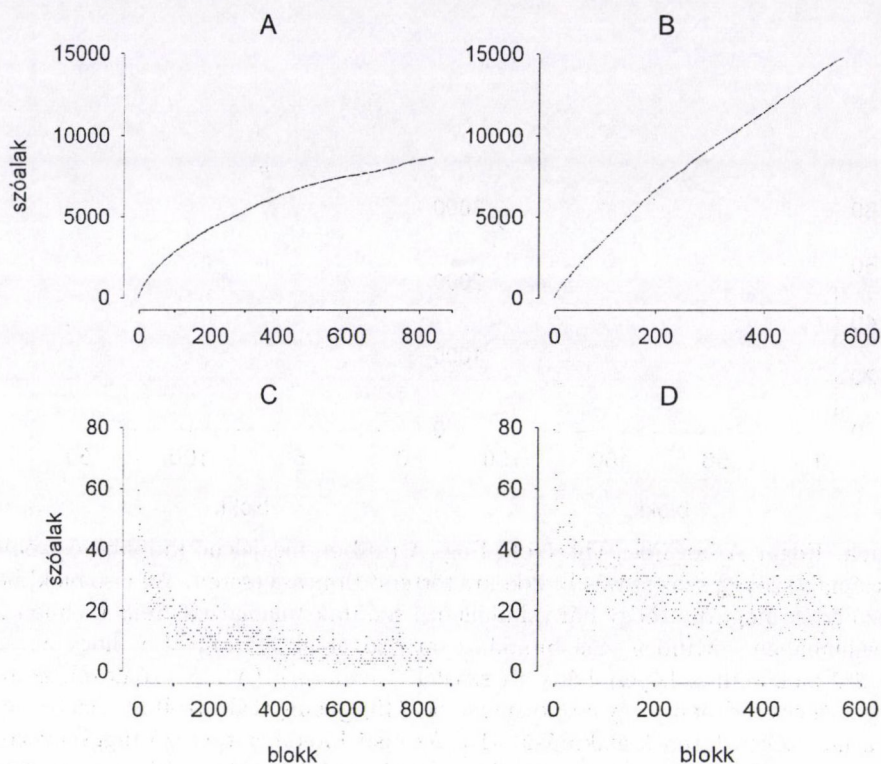
Az eredeti és a modell által generált mesterséges szöveget összehasonlítva azt találtuk, hogy az újonnan bevezetésre kerülő szóalakok viselkedésében nincs eltérés magyar és angol nyelvű szövegek esetén. Ez a megfigyelés nem mond ellent annak a hipotézisnek, hogy az eredeti és a mesterséges szöveg közötti eltérés nem mondat és bekezdés szintű, tehát nem szintaktikai és szemantikai kötöttségek miatt következik be, hanem szövegszerkezeti megfontolások következménye lehet.

Az újonnan bevezetett szóalakok számának a modell alapján nem megjósolható hirtelen növekedése olyan szövegszerkezeti változásokra utal, ahol a szerző váratlanul szakít a szöveg addig megszokott folyásával. Ilyen jellegű szakadást, törést okozhat a szóalakok számának várható alakulásában egy-egy helyszín, szereplő, esemény részletes leírása, egy az eredeti történethez szervesen nem kapcsolódó szövegrész megjelenése, egy-egy, az előzőekhez képest új stílusú, esetleg idegen anyanyelvű szereplő megjelenése, hosszas beszéltetése.

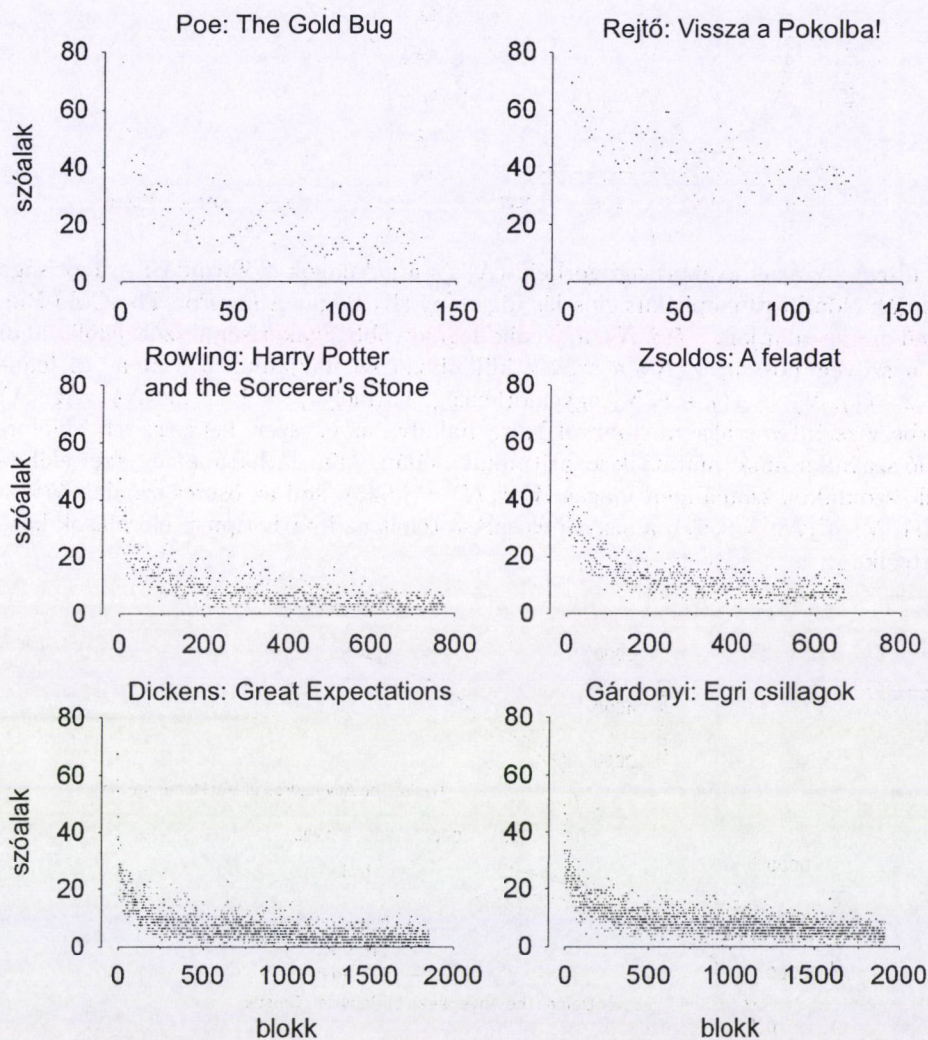
További vizsgálatainkban elsődleges célként tűztük ki ezen, szövegszerkezeti szinten megjelenő, változások pontos leírását. Éppen a modellek és a természetes nyelvi szöveg közötti eltéréseket tudjuk arra felhasználni, hogy megtaláljuk az eredeti szöveg azon pontjait, intervallumait, amelyek szakítva a szóalakok megjelenésének várható alakulásával szeleteket emelnek ki az addig megszokott logikus szövegfolyamból.



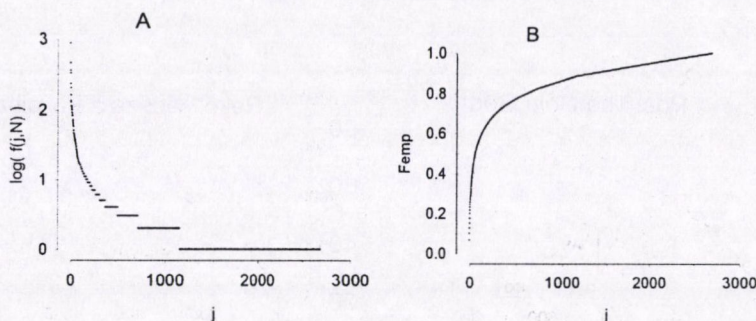
2. ábra. Edgar Allan Poe: The Gold Bug. A műben megjelenő különböző szóalakok száma a szöveg száz szavas blokkokra történő bontása esetén. Az első blokkhoz tartozó érték megadja, hogy hány különböző szóalak található a műnek ebben az intervallumában. Minden más blokkhoz tartozó érték azt mutatja, hogy az azt megelőző blokkokhoz képest hány új szóalak jelent meg (A). A szóalakok száma összegzésének eredménye egy monoton növekvő függvénnyel ábrázolható, mely megadja a mű szókészletének alakulását (B). Az első blokkhoz tartozó függvényérték megegyezik az A részen bemutatott függvény függvényértékével ebben a pontban, minden egyes további érték az azt megelőző függvényértékek összege.



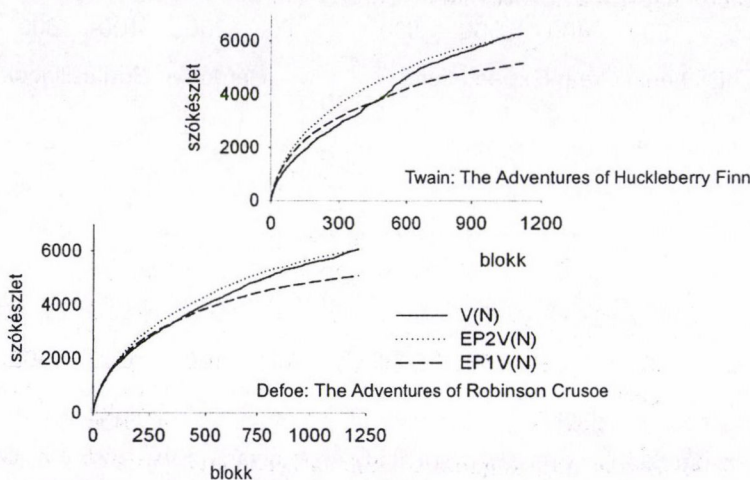
3. ábra. Szóalakok megjelenése és a szókészlet alakulása hasonló hosszúságú angol (Hawthorne: *The Scarlet Letter*; A és C) és magyar (Kertész Imre: *Sorstalanság*; B és D) nyelvű szépirodalmi művekben. Az alsó függvények (C és D) az újonnan bevezetett szóalakok számát mutatják az egyes blokkokban, míg az A és a B függvények ugyanezen művek szókészletének változását szemléltetik. Megfigyelhető ezeken az ábrákon, hogy a magyar nyelvű szövegben a különböző szóalakok száma és a szóalakok megjelenésének zaja lényegesen nagyobb, mint egy hasonló hosszúságú angol szövegben.



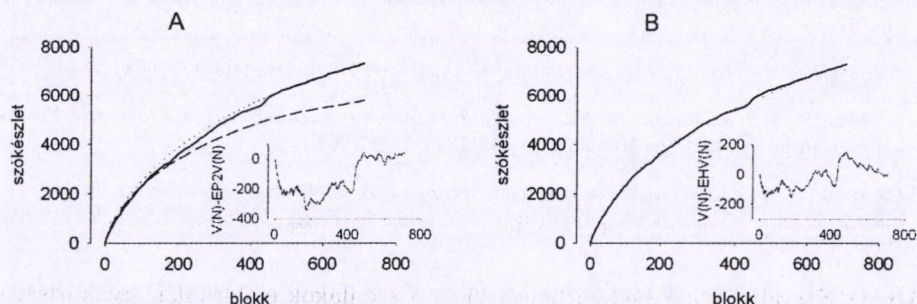
4. ábra. Szóalakok bevezetése angol (bal) és magyar (jobb) nyelvű irodalmi művekben. A szövegeket száz szövegszó hosszúságú blokkokra osztottuk. A grafikonok az egyes blokkokban újonnan bevezetett szóalakok számát mutatják különböző hosszúságú szövegek esetén. A felső sorban „rövid”, kb. 15 000, a középső sorban „közepes” hosszúságú, kb. 80 000, míg az alsó sorban hosszú, kb. 150 000 szövegszót tartalmazó művek újonnan bevezetett szóalakjainak száma látható.



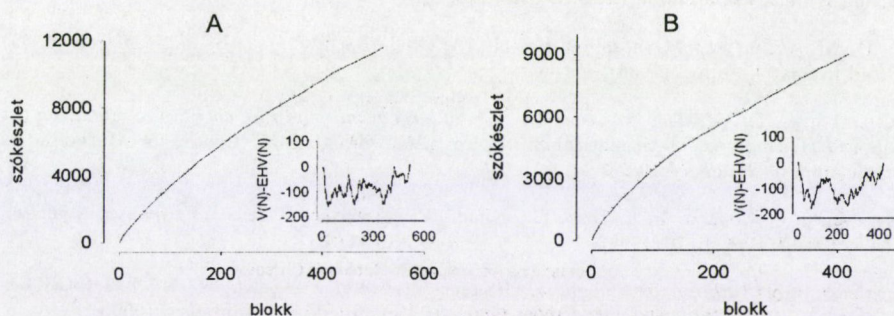
5. ábra. Szavak gyakorisági görbéje (A) és a szóalakok előfordulási gyakorisága alapján előállított empirikus eloszlás függvény (B) Edgar Allan Poe The Gold Bug című műve alapján. $f(j, N)$ a j -edik legnagyobb gyakoriságú szót jelöli, ahol N a szöveg hossza, $V(N)$ a szöveg különböző szóalakjainak a száma, és fennáll az $f(j, N) \geq f(j+1, N)$ egyenlőtlenség, bármely $j = 1, \dots, V(N)$. Az (A) görbe vízszintes szakaszai jobbról balra haladva az egyszer, kétszer, stb. előforduló szavak számát mutatják logaritmikus skálán. Mint látható, az egyszer előforduló szóalakok száma igen magas ($V(1, N) = 1543$), ami az összes szóalak 57%-a ($V(1, N)/V(N) = 0,57$); a szavak eloszlása tehát az LNRE típusú eloszlások közé tartozik.



6. ábra. Két közepes méretű – Mark Twain: The Adventures of Huckleberry Finn (felső) és Daniel Defoe: The Adventures of Robinson Crusoe (alsó) – angol nyelvű regény szókészletének összehasonlítása. A folyamatos vonal az eredeti mű szókészletét ($V(N)$), a szaggatott vonal az eredeti visszatevési modell alapján számolt szókészlet nagyságát ($EP1V(N)$), míg a pontozott vonal a módosított visszatevési modell alapján számolt értékeket ($EP2V(N)$) mutatja.



7. ábra A szókészlet nagyságának alakulása Mark Twain *The Adventures of Tom Sawyer* című művében és a mű alapján polinomiális (A), illetve hipergeometrikus (B) eloszlást feltételező modellekkel számolt mesterséges szövegekben. Az eredeti mű szókészletét a folytonos vonal mutatja. Az eloszlásfüggvény alapján előállított modelleket használva az A ábrarészen a szaggatott vonal az első visszatevési modell alapján ($EP1V(N)$), míg a pontozott vonal a módosított visszatevési modellel ($EP2V(N)$) kapott mesterséges szöveg szóalakjainak számát mutatja. A B ábra pontozott vonala a visszatevés nélküli modellel számolt mesterséges szöveg szókészletét ($EHV(N)$) adja. A belső ábrák az eredeti és a mesterséges szöveg szókészletének nagysága közötti eltérést mutatják.



8. ábra. A szókészlet nagyságának alakulása két magyar nyelvű szövegben (Tamási Áron: *Ábel a rengetegben*; A és Molnár Ferenc: *A Pál utcai fiúk*; B). Az eredeti szöveg szókészletét folyamatos vonallal, míg a modell szókészletét pontozott görbével ábrázoltuk. A belső grafikonok az eredeti és a mesterséges szöveg szókészlete közötti eltérést mutatják.

Hivatkozások

- [1] ARATÓ, M. – KNUTH, E.: *Sztochasztikus folyamatok elemei*. Tankönyvkiadó, Budapest (1970)
- [2] ASHBY, W. R.: *Bevezetés a kibernetikába*. Akadémiai Kiadó, Budapest, (1972)
- [3] BAAYEN R. H.: *Statistical Models for Word Frequency Distributions: A Linguistic Evaluation*. Computers and the Humanities 26, (1993), (347-363.)
- [4] BAAYEN, R. H.: *The Randomness Assumption in Word Frequency Statistics*. In Perissinotto, G. (ed), Research in Humanities Computing 5 (1996a) Oxford: Oxford University Press, (17-31.)
- [5] BAAYEN R. H.: *The Effect of Lexical Specialization on the Growth Curve of the Vocabulary*. Computational Linguistics 22, (1996b), (455-480.)
- [6] BAAYEN, R. H.: *Word Frequency Distributions*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands (2001)
- [7] BALÁZS, J.: *A szöveg Gondolat*, Budapest (1985)
- [8] CHURCH, K. W. – MERCER, R. L.: *Introduction to the Special Issue on Computational Linguistics Using Large Corpora*. In Armstrong (ed.) Using Large Corpora. A Bradford Book The MIT Press Cambridge, Massachusetts London, England (1994)
- [9] DEMETROVICS, J. – DENEV, J. – PAVLOV, R.: *A számítástudomány matematikai alapjai*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest (1985)
- [10] HAJTMAN, B.: *Bevezetés a matematikai statisztikába*. Akadémiai Kiadó Budapest (1971)
- [11] HOLMES, D. I.: *Vocabulary Richness and the Book of Mormon: A Stylometric Analysis of Mormon Scripture*. In Research in Humanities Computing. Hockey, S.; Ide, N.; Ross; D.; Brink, D. (eds.) Clarendon Press, Oxford (1994)
- [12] I. B. M.: *Final report on computer set AN/GSQ-16 (XW-1)*. I. B. M. Research (1959) Cited in Sparck Jones, (1986)
- [13] KHMALADZE, E. V.: *The statistical analysis of large number of rare events*. technical Report MS-R8804, Dept. of Mathematical Statistics, CWI. Amsterdam: Center for Mathematics and Computer Science (1987)
- [14] KIEFER, F.: *Alaktan*. In É. Kiss, K., Kiefer, F. és Siptár, P. (eds.) *Új magyar nyelvtan* Osiris Kiadó, Budapest (1998)
- [15] LACZKÓ, K.: *Alaktan*. In Balogh, J., Haader, L., Keszler, B., Kugler, N., Laczkó, K. és Lengyel, K. (eds.) *Magyar grammatika* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest (2000)
- [16] MARKOV, A. A.: *An Application of Statistical Method*. Izvestiya Imperialisticheskoy akademii nauk 6(4), (1916), (281-97.)
- [17] MESZÉNA, GY. – ZIERMANN, M.: *Valószínűség elmélet és matematikai statisztika*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest (1981)
- [18] NATION, P. – WARING, R.: *Vocabulary size, text coverage and word list*. In Schmitt, N. és McCarthy, M. (eds) *Vocabulary: Description, acquisition, and pedagogy* Cambridge University Press, Cambridge, UK (1997)

- [19] O'GRADY, W. – DOBROVOLSKY, M. – ARONOFF, M.: *Contemporary Linguistics*. An Introduction: St. Martin's Press, New York (1993)
- [20] PRÓSZÉKY, G.: *Számítógépes nyelvészet*. Számítástechnika-Alkalmazási Vállalat, Budapest (1989)
- [21] PRÓSZÉKY, G. – KIS, B.: *Számítógéppel – emberi nyelven. Intelligens szövegkezelés számítógéppel*. SZAK Kiadó, Budapest (1999)
- [22] SINGLETON, D.: *Exploring the Second Language Mental Lexicon*. Cambridge University Press, Cambridge (1999)
- [23] SOLT, GY.: *Valószínűségszámítás*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest (1971)

(Beérkezett: 2005. június 28.)

CSEBNOCH MÁRIA
DEBRECENI EGYETEM
INFORMATIKAI KAR
4010 DEBRECEN, PF.: 12.
mcsernoch@hotmail.com

DYNAMIC MODELS FOR THE ANALYSIS OF THE INTRODUCTION OF WORD-TYPES IN LITERARY WORKS

MÁRIA CSEBNOCH

The aim of this work was to build a dynamic model which is able to reproduce the course of newly introduced word-types in literary works. Unlike previously published static models which provided constants at each running, this dynamic model created artificial texts, each of which is an approximation of the original. At each run, however, due to the random selection of words, these artificial texts were different. When building the model the frequency of the word-types in the original text was used, therefore, the frequency of the words in the artificial text was equal to that of the original. All together, three different models were built. The first was based on the same theoretical background as the static models, where the polynomial distribution of word was assumed. Though the accuracy of this dynamic model was not any better than that of the static models, it was able to reproduce the trends in the introduction of word-types in the given text. The second model was a minor modification of the first, with a better approximation of the total number of tokens in the original text. The third model, which gave the best approximation, used the assumption that the words follow a hypergeometric distribution in texts. This model proved to be language independent, that is, it was able to reproduce text written in English or in Hungarian regardless of their morphological productivity.

DATALOG ALAPÚ FUZZY TUDÁSBÁZIS – BIZONYTALANSÁGKEZELÉSI MODELL –

ACHS ÁGNES

Tanulmányunkban egy lehetséges bizonytalanságkezelési modellt szeretnénk bemutatni. A fuzzy tudásbázist négyelemű halmazként definiáljuk, amelynek egyik eleme egy fuzzy következtetési rendszer, a fuzzy Datalog; másik eleme a háttértudás, amelyet a termék és predikátumok közötti hasonlóság segítségével adunk meg; harmadik eleme egy összekapcsolási algoritmus, amely összeköti a háttértudást és a következtetési mechanizmust; a negyedik eleme pedig a program dekódoló függvényeinek halmaza, amelyek segítségével meg tudjuk határozni az eredmény bizonytalansági szintjét. Dolgozatunkban bemutatunk lehetséges kiértékelési stratégiákat is.

1. Bevezetés

Az emberi tudás jó része bizonytalan, homályos, esetleg félreérthető vagy hiányos, emiatt nem minden részét lehet modellezni a kétértékű logikán alapuló következtetési rendszerekkel. A bizonytalan információk kezelésére számtalan megoldási javaslat készült, ezek közül most a fuzzy logikára épülő modelleket emeljük ki.

Néhány évvel ezelőtt kezdtünk el foglalkozni a Datalog-szerű nyelvek és a fuzzy logika összekapcsolásával. A Datalog tényeket és szabályokat bizonytalansági szinttel és implikációs operátorral egészítettük ki, és az ily módon kibővített fuzzy Datalog nyelvhez fixpont-szemantikát értelmeztünk ([6], [1]). A fuzzy Datalog nyelvet „éles” adatokra definiáltuk, de később kiterjesztettük fuzzy adatokra is ([7]).

Kutatásunkkal párhuzamosan, illetve az azóta eltelt években többen foglalkoztak a Prolog és a fuzzy logika összekapcsolásával, különböző javaslatokat adtak a fuzzy egységesítés megvalósítására. A legtöbb megoldási javaslat a hasonlóság fogalmán alapszik. Szinte mindegyikük reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációnak tekinti a hasonlóságot. Némelyikük a hasonlóság alapján ekvivalencia-osztályozást valósít meg, és ezeken az osztályokon értelmezi az egységesítést ([5], [16]). Virtanen nyelvi változókat definiál, és ezekkel valósítja meg a fuzzy illesztést ([19], [20]). Az előzőektől eltérő ötlet olvasható [17]-ben. Itt a szerzők az esetleges elírások

kezelésére dolgoznak ki egy számítási módszert, az elírásból adódó hibák számával definiálják a termék és predikátumok távolságát, és ezeknek a távolságnak a felhasználásával értelmezik a fuzzy egységesítést.

Dolgozatunkban szeretnénk folytatni korábbi elképzeléseinket, és a fuzzy Datalog további kiterjesztésén alapuló bizonytalanságkezelő modellt alkotunk. Mi is támaszkodunk a hasonlóság fogalmára, de nem követeljük meg annak tranzitív voltát.

Bár [6], [7], [8] részletesen tárgyalja a fuzzy Datalog fogalmát, a következőkben egy rövid összefoglalást adunk róla.

2. fuzzy Datalog

Egy Datalog program tényekből és szabályokból épül fel. A fuzzy Datalogban a tényeket bizonytalansági szintekkel, a szabályokat bizonytalansági szintekkel és implikációs operátorokkal egészítjük ki. Egy szabályfej bizonytalansági szintje a szabálytörzs bizonytalansági szintjéből és a szabály bizonytalansági szintjéből határozható meg az adott implikációs operátor segítségével.

Ha például a

$$\begin{aligned} \text{szép}('Juliska'); 0,7. \\ \text{szereti}('Jancsi', X) \leftarrow \text{szép}(X); 0,8; I. \end{aligned}$$

programban I a Gödel-féle implikációs operátort jelenti (vagyis $I(\alpha, \beta) = 1$, ha $\alpha \leq \beta$, $I(\alpha, \beta) = \beta$ egyébként), akkor a szabályfej bizonytalansági szintje a szabálytörzs és a szabály bizonytalansági szintjének minimumaként számolható ki. Esetünkben ez azt jelenti, hogy

$$\text{szereti}('Jancsi', 'Juliska'); 0,7,$$

azaz Jancsi legalább 0,7 szinten szereti Juliskát.

A továbbiakban pontosan definiáljuk a fuzzy Datalog (fDatalog) program fogalmát:

2.1. Definíció. fDatalog szabály egy $r; \beta; I$ hármas, ahol r egy

$$A \leftarrow A_1, \dots, A_n \quad (n \geq 0)$$

alakú formula, A atom (a szabály feje), A_1, \dots, A_n literálok (a szabály törzse), I egy implikációs operátor és $\beta \in (0, 1]$ (a szabály bizonytalansági foka vagy szintje).

A fDatalog szabály biztonságos, ha

- a fejben előforduló összes változó szerepel a törzsben is;
- az összes olyan változó, amely negatív literálban szerepel, előfordul pozitív literálban is.

Egy fDatalog program biztonságos fDatalog szabályok véges halmaza. Az $A \leftarrow; \beta; I$ alakú szabályokat, ahol A alapatom, tényeknek nevezzük. A továbbiakban ezeket (A, β) módon jelöljük, hiszen a legtöbb implikációs operátor esetén a szabályfejhez tartozó bizonytalansági szint megegyezik a szabály bizonytalansági szintjével, de az ettől eltérő tulajdonságú implikációs operátorok esetén is könnyen kiszámolható.

Egy fDatalog programhoz fixpont-szemantikát rendeltünk. Ez alapján a szabálytörzs és a szabály bizonytalansági fokából $(\alpha_{\text{törzs}}, \beta)$ az implikációs operátor (I) alkalmazásával megállapíthatjuk, hogy legalább milyen szinten érvényes a szabályfej. Vagyis a fDatalog szemantikája rákövetkezési transzformációk fixpontjaként értelmezhető.

A rákövetkezési transzformációkat a program Herbrand-bázisának fuzzy rész-halmazain értelmeztük. Mivel csak függvénymentes fDatalog programokkal foglalkoztunk, ezért esetünkben egy P program H_P -vel jelölt *Herbrand-univerzumán* a P -ben előforduló konstansokból képzett összes lehetséges alap-term halmazát értjük. A program B_P -vel jelölt *Herbrand-bázisa* pedig a P -ben előforduló predikátumszimbólumokból és H_P -beli alaptermekből képzett összes lehetséges alap-atom halmaza.

Egy szabály alap-előfordulásán egy olyan szabályt értünk, amelyet az eredeti szabályból a szabály változóinak H_P -beli elemekkel való helyettesítésével kapunk.

A program $\text{ground}(P)$ -vel jelölt alap-előfordulásán összes szabálya összes lehetséges alap-előfordulásának halmazát értjük.

A P program egy interpretációja Herbrand-bázisának egy fuzzy rész-halmaza:

$$\bigcup_{A \in B_P} (A, \alpha_A).$$

α_A -val az A atom igazságértékét jelöltük. A konjunkció és negáció igazságértékét a szokásos módon értelmeztük, vagyis:

$$\begin{aligned} \alpha_{A_1 \wedge \dots \wedge A_n} &= \min(\alpha_{A_1}, \dots, \alpha_{A_n}) \\ \alpha_{\neg A} &= 1 - \alpha_A. \end{aligned}$$

Egy interpretációt a P program modelljének tekintünk, ha

$$\begin{aligned} \text{minden } A \leftarrow A_1, \dots, A_n; \beta; I \in \text{ground}(P) \text{ esetén} \\ I(\alpha_{\text{törzs}}, \alpha_{\text{fej}}) \geq \beta, \end{aligned}$$

vagyis a szabálytörzs és a szabályfej bizonytalansági értékeiből képzett implikáció értéke nem kisebb a szabály bizonytalanságánál.

Kétfajta rákövetkezési transzformációt is definiáltunk, egy determinisztikus és egy nem determinisztikus. Belátható, hogy bizonyos feltételnek eleget tévő implikációs operátorok esetén mindkét transzformációnak van legkisebb fixpontja, amely egyúttal a program minimális modellje is. Ezeket tekintjük a fDatalog determinisztikus, illetve nemdeterminisztikus szemantikájának. Determinisztikus szemantika

alapján egy program szabályai párhuzamosan értékelhetők ki, nemdeterminisztikus esetben egymás után. Belátható, hogy függvény- és negációmentes program esetén a két szemantika megegyezik.

A két rákövetkezési transzformáció a következő:

2.2. Definíció. Legyen B_P a P program Herbrand-bázisa, és jelölje $F(B_P)$ a B_P fölötti fuzzy halmazok halmazát. A

$$DT_P : F(B_P) \rightarrow F(B_P) \quad \text{és} \quad NT_P : F(B_P) \rightarrow F(B_P)$$

rákövetkezési transzformációkat a következő módon értelmezzük:

$$DT_P(X) = \left\{ \bigcup \{ (A, \alpha_A) \} \mid (A \leftarrow A_1, \dots, A_n; \beta; I) \in \text{ground}(P), (|A_i|, \alpha_{A_i}) \in X, \right. \\ \left. 1 \leq i \leq n, \alpha_A = \max(0, \min \{ \gamma \mid I(\alpha_{\text{örzs}}, \gamma) \geq \beta \} \right\} \bigcup X$$

és

$$NT_P(X) = \{ (A, \alpha_A) \} \bigcup X,$$

ahol

$$(A \leftarrow A_1, \dots, A_n; \beta; I) \in \text{ground}(P), (|A_i|, \alpha_{A_i}) \in X, 1 \leq i \leq n, \\ \alpha_A = \max(0, \min \{ \gamma \mid I(\alpha_{\text{örzs}}, \gamma) \geq \beta \}),$$

$|A_i|$ -val az A_i literál magját jelöljük (vagyis azt az atomot, amely vagy amelynek negáltja a literált alkotja).

[7]-ben bebizonyítottuk, hogy a tényhalmazból indulva mindkét rákövetkezési transzformációnak létezik fixpontja, mely pozitív P program esetén egyúttal a legkisebb fixpont. Ezeket $\text{lfp}(DT_P)$ -vel, illetve $\text{lfp}(NT_P)$ -vel jelöltük.

Azt is beláttuk, hogy $\text{lfp}(DT_P)$ és $\text{lfp}(NT_P)$ a P program modelljei, így $\text{lfp}(DT_P)$ -t a fuzzy Datalog program determinisztikus szemantikájaként, $\text{lfp}(NT_P)$ -t pedig nemdeterminisztikus szemantikaként értelmeztük.

Függvény- és negációmentes fDatalog esetén a két szemantika megegyezik, de negációt tartalmazó esetben eltérhetnek egymástól. Előfordulhat, hogy a determinisztikus fixpont nem minimális modell, viszont – bizonyos feltételek esetén – a nem determinisztikus fixpont minimalitása továbbra is garantálható. Ez a feltétel a rétegzés. A rétegzés meghatároz egy kiértékelési sorrendet, amelyben a negatív literálokat értékeljük ki először, s ily módon minimális modellt kapunk. (A fuzzy Datalog rétegzését részletesen tárgyalja [7].)

2.1. Példa. Adott a következő fDatalog program :

1. $(r(a), 0, 8)$.
2. $p(x) \leftarrow r(x), \neg q(x); 0, 6; I$.
3. $q(x) \leftarrow r(x); 0, 5; I$.
4. $p(x) \leftarrow q(x); 0, 8; I$.

A rétegzési sorrend: $\{r, q\}, \{p\}$, vagyis a kiértékelési sorrend: 1., 3., 2., 4. (Pontosabban: először 1. és 3. tetszőleges sorrendben, majd 2. és 4. szintén tetszőleges sorrendben.)

A Gödel-féle implikációs operátor és nem-determinisztikus szemantika esetén:

$$lfp(NT_P) = \{(r(a), 0, 8); (p(a), 0, 5); (q(a), 0, 5)\}.$$

A továbbiakban csak nem-determinisztikus szemantikával foglalkozunk.

3. Háttértudás

Egy fuzzy Datalog program önmagában is leír valamilyen tudást, de sokszor mégsem ad választ a kérdésünkre. Gyakran előfordulhat ugyanis, hogy még egyéb információkra, háttértudásra is szükségünk van a válasz megtalálásához. Ebben a fejezetben a háttértudás egy lehetséges modelljét építjük fel. Ehhez a hasonlóság fogalmát vesszük alapul.

3.1. Definíció. Egy D tartomány fölötti hasonlóság a D egy olyan

$$S_D : D \times D \rightarrow [0, 1]$$

fuzzy részhalmaza, amelyre teljesülnek a következő tulajdonságok:

$$S_D(x, x) = 1 \text{ minden } x \in D \text{ esetén} \quad (\text{reflexivitás}),$$

$$S_D(x, y) = S_D(y, x) \text{ minden } x, y \in D \text{ esetén} \quad (\text{szimmetria}).$$

Egy hasonlóság tranzitív, ha

$$S_D(x, z) \geq \max \{ \min (S_D(x, y), S_D(y, z)) \} \text{ minden } x, y, z \in D \text{ esetén.}$$

A hasonlóságoktól általában nem követeljük meg a tranzitivitást, ugyanakkor azonban egy hasonlóságot leíró mátrixról, vagyis egy olyan mátrixról, amelynek elemei a D elemei közötti hasonlóság mértékét adják meg, eldönthető, hogy tranzitív hasonlóságot ír-e le.

Legyen S egy hasonlósági mátrix. A hasonlóság akkor és csak akkor tranzitív, ha

$$S \geq S \cdot S,$$

ahol a mátrix-szorzásban az elemek szorzása helyett azok minimumát képezzük, összeadásuk helyett pedig az elemek maximumát.

Modellünkben a háttértudást a hasonlósági halmazok segítségével definiáljuk.

3.2. Definíció. Legyen $d \in D$ a D tartomány egy eleme! A d hasonlósági halmazán D egy fuzzy részhalmazát értjük:

$$S_d = \{(d_1, \lambda_1), (d_2, \lambda_2), \dots, (d_n, \lambda_n)\},$$

$$\text{ahol } d_i \in D \text{ és } S_D(d, d_i) = \lambda_i \text{ minden } i = 1, \dots, n \text{ esetén.}$$

3.1. *Példa.* Könnyen belátható, hogy a következő hasonlósági mátrix tranzitív hasonlóságot ír le.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>a</i>	1	0,7	0,8	0,7	0,8
<i>b</i>	0,7	1	0,7	0,9	0,7
<i>c</i>	0,8	0,7	1	0,7	0,8
<i>d</i>	0,7	0,9	0,7	1	0,7
<i>e</i>	0,8	0,7	0,8	0,7	1

A hasonlóság fogalmával definiálhatjuk tetszőleges termék és tetszőleges predikátumszimbólumok hasonlóságát, ily módon megalkothatjuk az úgynevezett háttértudást.

3.3. *Definíció.* Legyen C alaptermek, R pedig predikátumszimbólumok egy halmaza. Legyen SC és SR valamilyen hasonlóság C , illetve R fölött. Háttértudáson C és R hasonlósági halmazainak unióját értjük:

$$Bk = \{SC_t | t \in C\} \cup \{SR_p | p \in R\}.$$

4. Fuzzy tudásbázis

Két lépést már megtettünk a fuzzy tudásbázis felépítéséhez vezető úton: definiáltuk a fuzzy Datalog program és a háttértudás fogalmát. A következő lépés a két fogalom összekapcsolása, melyet az összekapcsolási algoritmus segítségével oldunk meg. Ennek eredményeként az eredeti program és a háttértudás figyelembevételével egy módosított fDatalog programot kapunk, amelyet ki tudunk értékelni. A kiértékelés során kapott bizonytalansági szint értékek azonban még nem adják meg a végső választ az eredeti kérdésre, hiszen a végeredmény bizonytalansági szintjét ezekből és a felhasznált hasonlóságok értékeiből számíthatjuk ki. Eerre szolgálnak a dekódoló függvények. Ezekről elvárhatjuk, hogy azonosság esetén ne változtassák meg a kapott szintet, egyébként pedig legfőljebb akkora értéket adjanak, mint az eredeti bizonytalansági szint vagy a hasonlósági értékek. Azt is megköveteljük, hogy a dekódoló függvények minden változójukban monoton növekvők legyenek.

Ezek alapján a dekódoló függvény fogalmát a következő módon definiálhatjuk:

4.1. *Definíció.* Dekódoló függvényen egy olyan $(n+2)$ -változós függvényt értünk, melyre

$$\varphi(\alpha, \lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n) : (0, 1] \times (0, 1] \times (0, 1] \times \dots \times (0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$\varphi(\alpha, \lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \leq \min(\alpha, \lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

$$\varphi(\alpha, 1, 1, \dots, 1) = \alpha \text{ és}$$

$$\varphi(\alpha, \lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ minden argumentumában monoton növekvő.}$$

4.1. Példa.

$$\varphi_1(\alpha, \lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \min(\alpha, \lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n);$$

$$\varphi_2(\alpha, \lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \min(\alpha, \lambda, (\lambda_1 \dots \lambda_n));$$

$$\varphi_3(\alpha, \lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \alpha \cdot \lambda \cdot \lambda_1 \dots \lambda_n$$

dekódoló függvények.

A program összes predikátumához – de legalábbis a fej-predikátumokhoz – dekódoló függvényt kell rendelnünk. Ezek halmaza alkotja a program dekódoló halmazát.

4.2. Definíció. Legyen P egy fuzzy Datalog program, F_P a program funktora-inak halmaza (funktornak nevezzük egy atom predikátumszimbólumának és argumentumszámának együttesét, azaz pl. $q(t_1, t_2, \dots, t_n)$ esetén q/n -t). P dekódoló halmazán a

$$\Phi_P = \{\varphi_q(\alpha, \lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n) | \forall q/n \in F_P\}$$

halmazt értjük.

Tisztáztuk a szükséges fogalmakat, értelmezzük tehát a fuzzy tudásbázist!

4.3. Definíció. Fuzzy tudásbázison egy négyelemű $fKB = \{P, Bk, \Phi_P, mA\}$ halmazt értünk, ahol P egy fuzzy Datalog program, Bk a háttértudás, Φ_P a P dekódoló halmaza, és mA valamilyen módosítási (vagy összekapcsoló) algoritmus.

4.4. Definíció. Legyen $\{P, Bk, \Phi_P, mA\}$ egy fuzzy tudásbázis. A tudásbázis következményén a módosítási algoritmus szerint meghatározott mP program legkisebb fixpontját, $lfp(mP)$ -t értjük.

Jelölése: $C(P, Bk, \Phi_P, mA)$.

5. Módosítási algoritmusok

Különböző módosítási algoritmusokat definiálhatunk. Közülük tárgyal egyet-egyet [2], [3], illetve [4], a továbbiakban ezeket foglaljuk össze.

5.1. Egyszerű módosítás ($mA1$ algoritmus)

Legyen P egy fuzzy Datalog program, és Bk a háttértudás. Határozzuk meg az mP módosított fDatalog programot a következőképpen: helyettesítsük a P minden p predikátumát és minden $t \in H_P$ alap-termjét a hasonlósági halmazukkal, SR_p -vel, illetve SC_t -vel, és minden x változót az $X = \{x\}$ halmazzal.

A módosítás algoritmus:

5.1. Algoritmus.

```

Procedure módosítás( $P, mP$ )
   $mP := \emptyset$ 
  while nem(üres( $P$ )) do
     $(r; \beta; I) := a$   $P$  első szabálya
     $(R; \beta; I) := (\text{helyettesített}(r); \beta; I)$ 
     $mP := mP \cup (R; \beta; I)$ 
     $P := P - \{(r; \beta; I)\}$ 
  endwhile
endprocedure

function helyettesített( $r$ )
   $\text{Pred}_r :=$  az  $r$  predikátumainak halmaza
   $\text{Term}_r :=$  az  $r$  alap-termjeinek halmaza
   $\text{Var}_r :=$  az  $r$  változóinak halmaza

  while nem(üres( $\text{Pred}_r$ )) do
     $q := \text{Pred}_r$  első predikátumszimbóluma
     $Q := SR_q$ 
     $\text{Pred}_r := \text{Pred}_r - \{q\}$ 
  endwhile
  while nem(üres( $\text{Term}_r$ )) do
     $t := \text{Term}_r$  első alap-termje
     $T := SC_t$ 
     $\text{Term}_r := \text{Term}_r - \{t\}$ 
  endwhile
  while nem(üres( $\text{Var}_r$ )) do
     $x := \text{Var}_r$  első változója
     $X := \{x\}$ 
     $\text{Var}_r := \text{Var}_r - \{x\}$ 
  endwhile
  return helyettesített( $r$ )
endfunction

```

Az így kapott mP programot ugyanúgy értékeljük ki, mint egy közönséges fDatalog programot, de a kapott fixpont még a hasonlósági halmazokat tartalmazza, ezekből meg kell határoznunk az eredményként kapott alap-termeket. Ezek alkotják a módosított program fixpontját. Mivel $\text{lfp}(NT_{mP})$ legkisebb fixpont (ld. [6], [7]), ezért a tagjainak „kibontásával” kapott halmaz is legkisebb fixpont lesz.

5.1. Definíció. A módosított mP program legkisebb fixpontja:

$$\text{lfp}(mP) = \bigcup \{ (q(t_1, t_2, \dots, t_n); \varphi_q(\alpha_q, \lambda_q, \lambda_{t_1}, \dots, \lambda_{t_n})) \mid \forall (Q((T_1, T_2, \dots, T_n); \alpha) \in \text{lfp}(NT_{mP}), (q, \lambda_q) \in Q, (t_i, \lambda_{t_i}) \in T_i, 1 \leq i \leq n) \}.$$

Mivel

$$(q(t_1, t_2, \dots, t_n); \alpha) \in lfp(NT_P) \text{ esetén}$$

$$(Q(T_1, T_2, \dots, T_n); \alpha) = (SR_q(SC_{t_1}, SC_{t_2}, \dots, SC_{t_n}); \alpha) \in lfp(NT_{mP}),$$

$$\text{és } \varphi_q(\alpha, 1, 1, \dots, 1) = \alpha,$$

ezért igaz a következő állítás:

5.1. ÁLLÍTÁS.

$$lfp(NT_P) \subseteq C(P, Bk, \Phi_P, mA1).$$

5.1. Példa. Tekintsük az 1.2. példa fDatalog programját, és egészítsük ki az alábbi háttértudással, dekódoló halmazzal!

$$(r(a), 0, 8).$$

$$p(x) \leftarrow r(x), \neg q(x); 0, 6; I.$$

$$q(x) \leftarrow r(x); 0, 5; I.$$

$$p(x) \leftarrow q(x); 0, 8; I.$$

	a	b
a	1	0, 8
b	0, 8	1

	p	q	r	s	t
p	1	0, 4			
q	0, 4	1			
r			1	0, 6	0, 7
s			0, 6	1	
t			0, 7		1

$$\varphi_p(\alpha, x, y) = \varphi_q(\alpha, x, y) = \min(\alpha, x, y);$$

$$\varphi_r(\alpha, x, y) = \alpha \cdot x \cdot y$$

1.2. példa eredménye szerint

$$lfp(NT_{mP}) = \{(R(A), 0, 8); (P(A), 0, 5); (Q(A), 0, 5)\} =$$

$$= \{(\{(r, 1), (s, 0, 6), (t, 0, 7)\} \{(a, 1), (b, 0, 8)\}), 0, 8);$$

$$(\{(p, 1), (q, 0, 4)\} \{(a, 1), (b, 0, 8)\}), 0, 5);$$

$$(\{(q, 1), (p, 0, 4)\} \{(a, 1), (b, 0, 8)\}), 0, 5)\}.$$

Innen

$$lfp(mP) = \{(r(a), 0, 8), (r(b), 0, 64), (s(a), 0, 48), (s(b), 0, 384), (t(a), 0, 56),$$

$$(t(b), 0, 448), (p(a), 0, 5), (p(b), 0, 5), (q(a), 0, 5), (q(b), 0, 5)\}.$$

5.2. Transzformációs módosítás (mA2 algoritmus)

Az előző fejezetben tárgyalt módosítási algoritmus szerint a programot változtattuk meg, és a megváltoztatott programot az eredeti rákövetkezési transzformációval értékeltük ki. Mostani megközelítésünkben a programot változatlanul hagyjuk, és a kiértékelési transzformációt módosítjuk. Az így adódó programot most is mP -vel jelöljük.

Egy P program eredeti rákövetkezési transzformációját a program Herbrand-bázisának fuzzy részhalmazai fölött, vagyis $F(B_P)$ -n értelmeztük. A transzformáció módosításához $F(B_P)$ kiterjesztésére van szükségünk. Egészítsük ki a program Herbrand-univerzumát a háttértudásban szereplő összes alap-termmel, az így kapott halmazt módosított Herbrand-univerzumnak nevezzük, és mH_P -val jelöljük. A módosított Herbrand-bázis, mB_P , az összes lehetséges olyan alap-atomot tartalmazza, melynek predikátumszimbóluma eleme a $P \cup Bk$ halmaznak, argumentumai pedig a módosított Herbrand-univerzum elemei. A transzformáció segítségével a szabályfejekben lévő atomokra és a hozzájuk hasonló atomokra is tudunk következtetni. Pontosabban:

5.2. Definíció. Az $mNT_P : F(mB_P) \rightarrow F(mB_P)$ módosított rákövetkezési transzformációt a következőképpen értelmezzük:

$$mNT_P(X) = \{(q(s_1, \dots, s_n), \phi_p(\alpha, \lambda_q, \lambda_{s_1}, \dots, \lambda_{s_n})) | (q, \lambda_q) \in SR_p; \\ (s_i, \lambda_{s_i}) \in SC_{t_i}, 1 \leq i \leq n\} \bigcup X,$$

ahol

$$(p(t_1, \dots, t_n) \leftarrow A_1, \dots, A_k; I; \beta) \in \text{ground}(P), \\ (|A_i|, \alpha_{A_i}) \in X, 1 \leq i \leq k, \alpha = \max(0, \min\{\gamma | I(\alpha_{\text{törzs}}, \gamma) \geq \beta\}).$$

($|A_i|$ -val az A_i literál magját jelöljük.)

Belátható, hogy a program tényhalmazából kiindulva, a fent definiált transzformációnak létezik fixpontja. Mivel a módosítás nem befolyásolja a szabályok sorrendjét, ezért az a rétegzésre sincs hatással, vagyis a fenti transzformációnak rétegzett program esetén is van legkisebb fixpontja ($\{4\}$).

A módosított program fixpontját, vagyis a tudásbázis következményét az mNT_P transzformáció fixpontjaként értelmezhetjük.

5.3. Definíció. A módosított mP program legkisebb fixpontja:

$$lfp(mP) = lfp(mNT_P).$$

A fenti konstrukció alapján nyilvánvaló, hogy az $mA2$ algoritmus esetén is fennáll az 5.1. állításban megfogalmazotthoz hasonló tartalmazási reláció:

5.2. ÁLLÍTÁS.

$$lfp(NT_P) \subseteq C(P, Bk, \Phi_P, mA2).$$

5.2. Példa. Tekintsük ismét az 5.1. példát, és határozzuk meg a tudásbázis következményét az mNT_P transzformáció segítségével.

Induljunk ki az $X = \{(r(a), 0, 8)\}$ tényhalmazból. A kiértékelési sorrend most is legyen ugyanaz, mint a 2.1. példában, vagyis 1., 3., 2., 4. szabály.

A kiindulási halmaz a hasonlóság figyelembevételével a következőképpen alakul:

$$X = \{(r(a), 0, 8), (r(b), 0, 64), (s(a), 0, 48), (s(b), 0, 384), (t(a), 0, 56), (t(b), 0, 448)\}.$$

A 3. szabály kibővíti ezt a halmazt a $\{(q(a), 0, 5), (q(b), 0, 5)\}$ halmazzal, majd az újabb elemekre is figyelembe véve a hasonlóságot, az alapatomok halmaza tovább bővül a $\{(p(a), 0, 4), (p(b), 0, 4)\}$ halmazzal.

A 2. szabály alapján a $\{(p(a), 0, 5), (p(b), 0, 5)\}$ atomokra következtethetünk. Mivel a további lépések már nem hoznak új eredményt, a két halmaz uniója a transzformáció legkisebb fixpontja, és egyúttal a tudásbázis következménye:

$$lfp(mP) = \{(r(a), 0, 8), (r(b), 0, 64), (s(a), 0, 48), (s(b), 0, 384), (t(a), 0, 56), (t(b), 0, 448), (q(a), 0, 5), (q(b), 0, 5), (p(a), 0, 5), (p(b), 0, 5)\}.$$

Látható, hogy esetünkben a kétfajta módosítási algoritmus ugyanahhoz a következményhez vezetett. Ez azonban nincs mindig így, általában az $mA2$ algoritmusmal definiált tudásbázis következménye bővebb a másikinál. A két konstrukció összehasonlításából nyilvánvalóan adódik a következő:

5.3. ÁLLÍTÁS.

$$C(P, Bk, \Phi_P, mA1) \subseteq C(P, Bk, \Phi_P, mA2).$$

Ugyancsak egyszerűen belátható, hogy $lfp(mP)$ mindkét esetben a P modellje, de mivel $lfp(NT_P) \subseteq lfp(mP)$, ezért nem minimális modell.

5.3. Példa. Tekintsük a következő tudásbázist:

$lo(x, y) \leftarrow gc(y), mu(x); 0, 7; I.$
 $(fv(V), 0, 9).$
 $(mf(M), 0, 8).$

$$I(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \alpha \leq \beta \\ \beta & \text{egyébként} \end{cases}$$

	lo	li	gc	fv	mu	mf
lo	1	0, 8				
li	0, 8	1				
gc			1	0, 75		
fv			0, 75	1		
mu					1	0, 6
mf					0, 6	1

	B	V	M
B	1	0, 9	
V	0, 9	1	
M			1

$\Phi_{lo} := \Phi = \Phi(\alpha, x, y, z) := \min(\alpha, x, y, z)$
$\Phi_{fv} := \Theta = \Theta(\alpha, x, y) := \alpha \cdot x \cdot y$
$\Phi_{mf} := \omega = \omega(\alpha, x, y) := \min(\alpha, x \cdot y)$

Ekkor

$$C(P, Bk, \Phi_P, mA1) = \{(fv(V), 0, 9); (fv(B), 0, 81); (gc(V), 0, 675); (gc(B), 0, 6075); (mf(M), 0, 8); (mu(M), 0, 6)\},$$

$$C(P, Bk, \Phi_P, mA2) = \{(fv(V), 0, 9); (gc(V), 0, 675); (fv(B), 0, 81); (gc(B), 0, 6075); (mf(M), 0, 8); (mu(M), 0, 6); (lo(M, V), 0, 6); (lo(M, B), 0, 6); (li(M, V), 0, 6); (li(M, B), 0, 6)\}.$$

Megjegyzés. A fenti tudásbázishoz a következő „jelentés” rendelhető: tegyük fel, hogy a muzsikások (mu) általában (vagyis 0,7 szinten) szeretik (lo) a jó zeneszerzőket (gc).

Tudjuk, hogy Márta (M) eléggé (0,8 szinten) kedveli a zenét (mf). Azt is tudjuk, hogy Vivaldi (V) általában (0,9 szinten) kedvenc zeneszerző (fv). Azt is tudjuk, hogy Vivaldi és Bach (B) hasonló zeneszerzők. Vajon következtethetünk-e arra, hogy Márta mennyire kedveli (li) Bachot? Azt tapasztaltuk, hogy ha az $mA1$ algoritmussal kötjük össze a programot és a háttértudást, akkor erre nem tudunk következtetni, az $mA2$ algoritmussal viszont igen.

6. Kiértékelési stratégiák

Egy fuzzy tudásbázis következményét fixpont szemantikával értelmeztük. Ez azt jelenti, hogy a tényekből kiindulva a szabályok és a hasonlóság alkalmazásával következtettünk az összes előállítható atomra. Az ilyen fajta kiértékelést „bottom-up” következtetésnek nevezzük.

Sokszor előfordulhat azonban, hogy nincs szükség a teljes kiértékelésre, hiszen egy konkrét kérdésre keressük a választ, el akarjuk dönteni egy állítás igaz vagy hamis voltát, meg akarjuk állapítani bizonytalansági fokát. Ez azt jelenti, hogy egy cél ismeretében elég „célrányosan” végezni a kiértékelést, vagyis elég, ha csak a cél eléréséhez szükséges szabályokat, tényeket vesszük figyelembe. Azt a fajta kiértékelési stratégiát, amikor a célból kiindulva a megfelelő szabályok kiválasztásával a tények felé következtetve értékeljük ki a szabályokat, „top-down” kiértékelésnek nevezzük. A stratégia alkalmazhatóságához ki kell egészítenünk a tudásbázist a meghatározandó céllal (kérdéssel), vagyis egy $(q(t_1, t_2, \dots, t_n), \alpha)$ párral, ahol $q(t_1, t_2, \dots, t_n)$ atom, α pedig az atom bizonytalansági szintje. A q argumentumai között lehetnek változók is, és α is lehet változó vagy konstans. A továbbiakban mindkét típusú tudásbázis top-down kiértékelését tárgyaljuk.

6.1. Az $mA1$ algoritmussal összekapcsolt tudásbázis kiértékelése

A fuzzy Datalog top-down kiértékelési stratégiájával foglalkozik [1] és [8], fuzzy tudásbázisra való kibővítésével pedig [2] és [3]. Jelen tanulmányban a részletek mellőzésével adunk rövid összefoglalót az ott tárgyaltakról.

A top-down kiértékelés általában azt jelenti, hogy kiindulva a célból, újabb részcélokat generálunk úgy, hogy kiválasztjuk az összes olyan szabályt, amelynek feje illeszthető az adott céllal, és a szabálytörzs atomjait újabb részcéloknak tekintjük. Ezt az eljárást addig folytatjuk, amíg el nem jutunk a tényekig. Egy fuzzy Datalog program kiértékelése során is a cél felől haladunk a tényekig, de nem állunk meg, amikor elértük őket, hiszen a cél bizonytalansági szintjét is meg kell határoznunk.

A kiértékelést az úgynevezett kiértékelési gráf segítségével hajthatjuk végre. Ez egy $\bar{E}S/VAGY$ fa-gráf, vagyis egy speciális hipergráf, melynek – a kiértékelendő célt tartalmazó gyökér szintjét 0-nak tekintve – minden páratlan mélységű éle n -edrendű hiperél, a hozzá tartozó n elemből álló halmaz-csúccsal, páros mélységű élei pedig közönséges élek. A gráf minden páros szintjén kiértékelésre váró részcélok, azaz megfelelő módon illesztett szabályfejek, minden páratlan szintjén kiértékelendő szabálytörzsek szerepelnek. A gráf levelei az IGAZ/HAMIS szimbólumok: ha a részcélt sikerült egy tényállítással illeszteni, akkor az IGAZ, ha egyetlen illeszthető szabályfej sincs, akkor a HAMIS szimbólum.

Megcímkézzük a gráf közönséges éleit, a címke az alkalmazott helyettesítést, az adott éllel reprezentált szabály bizonytalansági szintjét és implikációs operátorát tartalmazza. A lekérdezésre a kiértékelési gráf címkeiből kapjuk meg a választ. Az IGAZ szimbólumban végződő hiperutak mentén a levelekből a gyökér felé haladva a címkek segítségével ki tudjuk számolni a szükséges bizonytalansági értékeket, végül meghatározható a gyökér bizonytalansági szintje is.

A most ismertetett eljárás kiterjeszthető rétegzett fDatalog programokra is.

Az $mA1$ algoritmussal összekapcsolt tudásbázisban a módosított program, mP , ugyanolyan szerkezetű, mint az eredeti fuzzy Datalog program, ezért egy cél ismeretében mP is kiértékelhető top-down módon. Ahhoz, hogy ezt megtegyük, a program módosításához hasonlóan, a hasonlósági halmazok felhasználásával alakítjuk át az adott $(q(x_1, x_2, \dots, x_n); \alpha)$ célt a módosított $(Q(X_1, X_2, \dots, X_n); \alpha)$ céllá. Az így keletkező kérdésre az előzőekben vázolt módon kapunk választ. Innen a dekódoló függvényeken alapuló eljárás segítségével meghatározhatunk egy válasz-halmazt, amely tartalmazza az eredeti kérdésre nyert választ is.

6.1. Algoritmus.

```

Procedure dekódolás ( $Q, P, SR, SC, \Phi_P$ , Válaszok)
   $S := a(Q; \alpha)$  kérdésre adott válaszok halmaza
  Válaszok  $:= \emptyset$ 
  while nem(üres( $S$ )) do
     $(Q(T_1, T_2, \dots, T_n); \alpha) :=$  az  $S$  első eleme
    Válaszok  $:=$  Válaszok  $\cup$  dekódolt( $Q(T_1, T_2, \dots, T_n); \alpha$ )
    /*az összes válasz dekódolása*/
     $S := S - \{(Q(T_1, T_2, \dots, T_n); \alpha)\}$ 
  endwhile
endprocedure
function dekódolt( $Q(T_1, T_2, \dots, T_n); \alpha$ )

```

```

Dekódolt_halmaz :=  $\emptyset$ 
while nem(üres( $Q$ )) do
   $(q, \lambda_q) := Q$  első eleme
   $q\_set := \emptyset$ 
  for all  $(t_i, \lambda_{t_{ii}}) \in T_i$  do
     $q\_set := q\_set \cup \{(q(t_1, t_2, \dots, t_n); \phi_q(\alpha, \lambda_q, \lambda_{t_1}, \dots, \lambda_{t_n}))\}$ 
  endfor
  Dekódolt_halmaz := Dekódolt_halmaz  $\cup$   $q\_set$ 
  /*  $a(Q(T_1, T_2, \dots, T_n); \alpha)$  válasz összes „hasonmása” */
   $Q := Q - \{(q, \lambda_q)\}$ 
endwhile
return Dekódolt_halmaz
endfunction

```

A fenti algoritmus alapján könnyen belátható a következő állítás:

6.1. ÁLLÍTÁS. Legyen Válaszok a 6.1. Algoritmus alapján meghatározott válasz-halmaz. Ekkor

$$\text{Válaszok} \subseteq C(P, Bk, \Phi_P, mA1).$$

6.2. Az $mA2$ algoritmussal összekapcsolt tudásbázis kiértékelése

Az $mA2$ algoritmussal összekapcsolt tudásbázis bonyolultabb rákövetkezési transzformációra épül, és következménye bővebb, mint az $mA1$ algoritmussal összekapcsolt tudásbázisé. Emiatt még inkább indokolt a top-down kiértékelés. Ugyanakkor – legalábbis jelenleg – nem megoldott a tisztán felülről lefelé való építkezés, ehhez ugyanis a kiértékelés során meg kellene oldani a fuzzy egységesítést, illetve a dekódoló függvények valamilyen értelmű invertálását. A közönséges fuzzy Datalog kiértékeléséhez hasonlóan most is két irányban – fölről lefelé, majd alulról fölfelé – haladunk a kiértékeléssel, sőt, a „bottom-up” kiértékelésre támaszkodunk, de „top-down” módon választjuk ki a cél megválaszolásához szükséges kiindulási tényeket.

A most megtárgyalandó eljárás célja tehát, hogy meghatározza a válasz megadásához szükséges kiindulási tényeket. Emiatt a továbbiakban – legalábbis a kiindulási halmaz meghatározásához – nincs szükségünk a bizonytalansági szintekre, ezért csak közönséges Datalog tényeket és szabályokat értékelünk ki, mégpedig „top-down” módon. Ehhez szükségünk lesz a helyettesítés és az egységesítés fogalmára, amelyet a továbbiakban ismertnek feltételezünk (a szükséges fogalmakat részletesen tárgyalja pl. [1], [10], [15], [18], stb.). Speciális helyettesítésekre is szükségünk van: időnként helyettesíteni kell egy p predikátumot vagy egy t termet a hasonlósági halmazával, S_p -vel, illetve S_t -vel, és időnként helyettesíteni kell egy hasonlósági halmazt az elemeivel.

Az egyszerűbb fogalmazás kedvéért ezentúl bizonytalansági szint nélkülünk tekintjük a célt, szabályokat, tényeket. A mostani kiértékelés során is felépítünk egy ÉS/VAGY gráfot, az úgynevezett keresési fát. Ennek gyökere a cél, levelei pedig az IGAZ/HAMIS szimbólumok. Az IGAZ levelek szülőcsúcsai a keresett kiindulási

tények. Ez a keresési fa a hasonlóságon és a szabályokon alapuló egységesítés váltakozásával épül fel.

A szabályokon alapuló helyettesítés a részcélt a vele illeszthető szabályfejekkel egységesíti, és a kiértékelést a szabálytörzsszel folytatja. Az egységesítés során alkalmazott helyettesítés speciális abban az értelemben, hogy egy konstans a hasonlósági halmazával helyettesítünk, illetve az argumentumokban már szereplő hasonlósági halmazok úgy viselkednek, mint a közöséges egységesítés konstansai.

A hasonlóság alapú egységesítés a részcel predikátumszimbólumát helyettesíti hasonlósági halmaza tagjaival. Az első és az utolsó hasonlóság alapú egységesítés eltér a többitől. Az első a cél alap-termjeit egységesíti a hasonlósági halmazukkal – ezek a halmazok a kiértékelés végéig konstansként viselkednek. Az utolsó ennek a fordítottját végzi: az eredmény tények argumentumaiban szereplő hasonlósági halmazokat helyettesíti az elemeikkel.

Az előzőek figyelembevételével a keresési fa a következőképpen épül fel: ha a cél szintjét 0 mélységűnek tekintjük, akkor minden $3k + 2$ ($k = 0, 1, \dots$) mélységben lévő csúcs rákövetkezői **ÉS** kapcsolatban állnak, a többiek **VAGY** kapcsolatban. Részletezve:

Induljunk ki a $g(t_1, t_2, \dots, t_n)$ célból. Ennek rákövetkezője az összes lehetséges $g'(t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$ atom, ahol $g' \in S_g$; $t'_i = t_i$, ha t_i változó, és $t'_i = S_{t_i}$, ha t_i alap-term.

Ha a $p(t_1, t_2, \dots, t_n)$ atom mélysége $3k$ ($k = 1, 2, \dots$), akkor rákövetkezője az összes lehetséges $p'(t_1, t_2, \dots, t_n)$ atom, ahol $p' \in S_p$.

Ha az L atom a $3k + 1$ ($k = 1, 2, \dots$) mélységben van, akkor a rákövetkező csúcspontokban vagy a vele egységesített szabály törzse szerepel, vagy egy vele egységesített tény, vagy a HAMIS szimbólum, ha L egyetlen szabályfejjel vagy ténnyel sem egységesíthető. Kicsit precízebben: ha az $M \leftarrow M_1, \dots, M_n$ ($n > 0$) szabály feje egységesíthető L -lel, akkor az L rákövetkezője $M_1\theta, \dots, M_n\theta$, ahol θ az L és M legáltalánosabb egységesítője. Ha $L = p(t_1, t_2, \dots, t_n)$, és a programban létezik p predikátumszimbólumú tény, akkor L rákövetkezője az összes lehetséges $p(t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$ atom, ahol $t'_i \in S_{t_i}$, ha $t_i = S_{t_i}$, vagy $t'_i = t_i\theta$, ha t_i változó, és θ a megfelelő illesztés.

Az előzőek alapján háromféle csúcspont lehet a $3k + 2$ ($k = 1, 2, \dots$) mélységű szinten: egy illesztett szabálytörzs; egy egységesített tény közöséges argumentumokkal vagy a HAMIS szimbólum. Az első esetben a rákövetkezők a törzs **ÉS** kapcsolatban lévő tagjai. Ha a törzs csak egyetlen literált tartalmaz, akkor csökkenthető lenne a kiértékelési út hossza, ez azonban az egységes tárgyalásmód rovására menne.

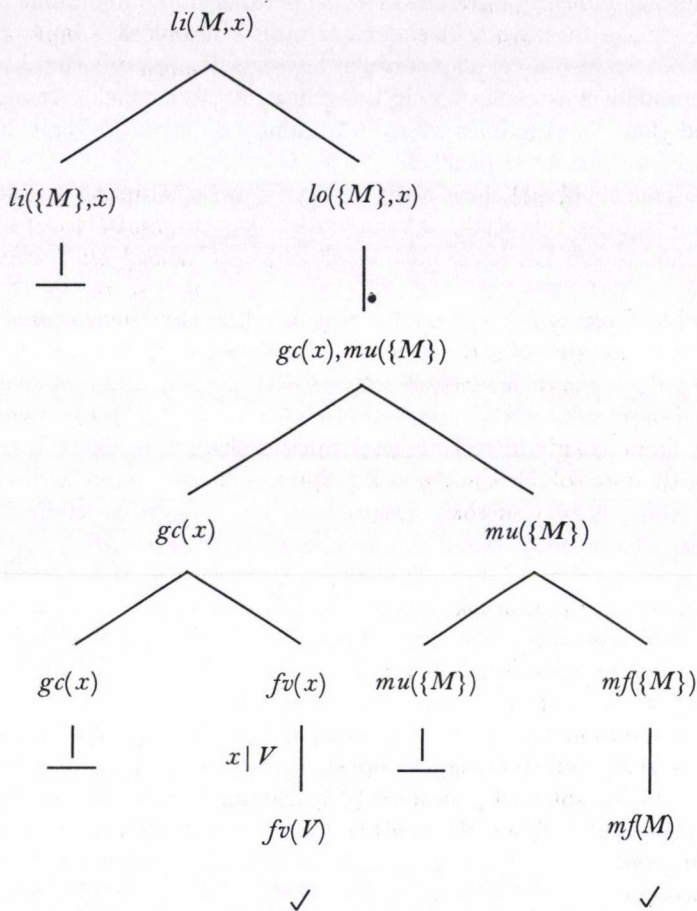
A második esetben a rákövetkezők az IGAZ/HAMIS szimbólumok valamelyike, attól függően, hogy az egységesített tény szerepel-e a program alap-atomjai között vagy sem. A HAMIS címkéjű csúcspontnak nincs utóda.

A keresési gráf konstrukciója alapján nyilvánvaló:

6.2. ÁLLÍTÁS. Legyen X_0 az IGAZ szimbólumok szülő-csúcsaiban lévő tények halmaza. X_0 -ból kiindulva, az mNT_P transzformáció fixpontja tartalmazza a kérdésre adható választ.

Természetesen elképzelhető, hogy ez a fixpont nemcsak a választ tartalmazza, hanem egyéb, fölösleges alap-atomot is, de általában kisebb, mint a tudásbázis teljes következménye. A keresési fa méretének csökkentése, és a fölösleges válaszok kiszűrése egy esetleges további kutatás eredménye lesz.

6.1. *Példa.* Egészítsük ki az 5.3. példa programját az $li(M, x)$ céllal, ahol x változó. A lekérdezés keresési gráfja:



1. ábra. A lekérdezés keresési gráfja

Az $X_0 = \{(fv(V), 0, 9), (mf(M), 0, 8)\}$ halmazból indulva most ugyanazt a fixpontot kapjuk, mint az 5.3. példában, de nyilvánvaló, hogy az így kapott fixpont általában szűkebb, mint a tudásbázis teljes következménye.

A fentiekben tárgyalt konstrukció a következő algoritmusban foglalható össze:

6.2. Algoritmus.

```

Procedure kiértékelés ( $g(\underline{t})$ , Eredmények) /* $g(\underline{t})$  a cél*/
    Fejek := {a programban szereplő szabályfejek}
    Tények := {a programban szereplő tények}
    Eredmények :=  $\emptyset$  /*az eredményül kapott ki-  
indulási tények*/

    for all  $t \in \underline{t}$  do
        if változó( $t$ ) then  $s := t$ 
        else  $s := St$  /* $St$  a  $t$  hasonlósági hal-  
maza */
        end_if
    end_for

    Csúcsok := { $g(\underline{s})$ } /*Csúcsok a kiértékelendő  
csúcsok halmaza,  $\underline{s}$  az  $s$  ele-  
mekből álló vektor, az ere-  
deti sorrendben*/

    Új_csúcsok :=  $\emptyset$  /*Csúcsok rákövetkezői*/
    while nem_üres(Csúcsok) do
         $p(\underline{t}) := \text{eleme}(\text{Csúcsok})$ 
        Spcsúcsok :=  $\emptyset$  /* $p(\underline{t})$  rákövetkezői*/
        hasonlósági_kiértékelés( $p(\underline{t})$ , Spcsúcsok)
        Új_csúcsok := Új_csúcsok  $\cup$  Spcsúcsok
        Csúcsok := Csúcsok  $- \{p(\underline{t})\}$ 
    end_while

    Csúcsok := új_csúcsok
    Új_csúcsok :=  $\emptyset$ 
    while nem_üres(Csúcsok) do
         $p(\underline{t}) := \text{eleme}(\text{Csúcsok})$ 
        Spcsúcsok :=  $\emptyset$  /* $p(\underline{t})$  rákövetkezői*/
        szabály_kiértékelés( $p(\underline{t})$ , Spcsúcsok)
        Új_csúcsok := Új_csúcsok  $\cup$  Spcsúcsok
        Csúcsok := Csúcsok  $- \{p(\underline{t})\}$ 
    end_while
end_procedure

procedure hasonlósági_kiértékelés( $p(\underline{t})$ , Spcsúcsok)
    for all  $q \in Sp$  do /* $Sp$  a  $p$  hasonlósági  
halmaza*/
        Spcsúcsok := Spcsúcsok  $\cup \{q(\underline{t})\}$ 
    end_for
end_procedure

```

```

procedure szabály_kiértékelés( $p(\underline{t})$ , Spcsúcsok)
  for all  $p(\underline{v}) \in \text{Fejek}$  do
    if egységesíthető( $p(\underline{t})$ ,  $p(\underline{v})$ ) then
      Spcsúcsok := Spcsúcsok  $\cup$  {a  $p(\underline{v}\theta)$  fejű
        szabály törzsének illesz-
        tett predikátumai }      /* $\theta$  a megfelelő egysé-
                                gesítés*/
    end_if
  end_for

  for all  $p(\underline{v}) \in \text{Tények}$  do
    if egységesíthető( $p(\underline{t})$ ,  $p(\underline{v})$ ) then
      for all  $St \in \underline{v}\theta$  do      /* $\theta$  a megfelelő egysé-
                                gesítés*/
        if változó( $St$ ) then
           $t := St\tau$           /* $\tau$  a megfelelő egysé-
                                gesítés*/
        else if hasonlósági_halmaz( $St$ ) then
           $t := \text{eleme}(St)$ 
        end_if
      end_for
    end_if
    for all lehetséges  $\underline{t}$  do      /* $\underline{t}$  a  $t$  elemekből álló
                                vektor a megfelelő sor-
                                rendben*/
      if  $p(\underline{t}) \in \text{Tények}$  then
        Eredmények := Eredmények  $\cup$  { $p(\underline{t})$ }
      end_if
    end_for
  end_for
end_for
end_procedure

```

Ugyanez az algoritmus rétegzett fDatalog program esetén is használható, ha a szabálytörzs rákövetkezőjének meghatározásakor figyelmen kívül hagyjuk a negációt.

7. Összesítés

Tanulmányunkban a bizonytalan információk kezeléséhez kívántunk lehetséges modellt nyújtani. Modellünket a deduktív adatbázis-kezelő nyelvre, a Datalogra és a fuzzy logikára alapozva képzeltük el. Ezért a fuzzy tudásbázist egy négyelemű halmazként értelmeztük, amelynek egyik eleme egy fuzzy következtetési rendszer, a fuzzy Datalog; másik eleme a háttértudás, amelyet a termék és predikátumok közötti hasonlóság segítségével adtunk meg; harmadik eleme egy összekapcsolási

algoritmus, amely összeköti a háttértudást és a következtetési mechanizmust; a negyedik eleme pedig a program dekódoló függvényeinek halmaza, amelyek segítségével meg tudjuk határozni az eredmény bizonytalansági szintjét. A tudásbázis következtetési rendszerét többféle elképzelés alapján kapcsolhatjuk össze a háttértudással, erre vonatkozóan két összekapcsolási algoritmust definiáltunk, és össze is hasonlítottuk a segítségükkel definiált tudásbázisok következményeit. Mindkét algoritmus esetén megadtunk egy top-down kiértékelési algoritmust, amely javítja a hatékonyságot. Különösen a második algoritmus esetén ez a hatékonyság még kívánivalókat hagy maga után. A kiértékelés hatékonyságának javítása, illetve egy jobb, vagy az eddigiektől eltérő módosítási algoritmus megtalálása egy esetleges későbbi kutatás célja lehet. •

Hivatkozások

- [1] ÁGNES ACHS: *Evaluation Strategies of Fuzzy Datalog*. Acta Cybernetica, Szeged **13**, 1997, (85-102.)
- [2] ÁGNES ACHS: *Fuzzy Datalog with background knowledge*. (Accepted in Teaching Mathematics and Computer Science, Debrecen)
- [3] ÁGNES ACHS: *Fuzzy knowledge-base with fuzzy Datalog – a model for handling uncertain information*. ISDA 2004 – IEEE 4th International Conference on Intelligent System Design and Application, Budapest, August 26-28, 2004, (55-60.)
- [4] ÁGNES ACHS: *Computed answer from uncertain knowledge*.
- [5] F. ARCELLI – F. FORMATO – G. GERLA: „Fuzzy Unification as Foundations of Fuzzy Logic programming” in Logic Programming and Soft Computing, Ed. RSP-Wiley, England, 1998
- [6] ÁGNES ACHS – ATTILA KISS: *Fixpoint query in fuzzy Datalog*. Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp.**15**, 1995, (223-231.)
- [7] ÁGNES ACHS – ATTILA KISS: *Fuzzy extension of Datalog* Acta Cybernetica, Szeged **12**, 1995, (153-166.)
- [8] ACHS ÁGNES – KISS ATTILA: *A Datalog fuzzy kiterjesztése*. Alkalmazott Matematika Lapok, Budapest, 1998, (111-138.)
- [9] J. F. BALDWIN – T. P. MARTIN: *Learning Uncertain Logic Programs from Examples*. Logic Programming and Soft Computing (LPSC98), Manchester
- [10] S.CERI – G.GOTTLOB – L.TANCA: *Logic Programming and Databases*. Springer-Verlag Berlin, 1990
- [11] DIDIER DUBOIS – HENRI PRADE: *Fuzzy sets in approximate reasoning, Part 1. Inference with possibility distributions*, Fuzzy Sets and Systems **40**, 1991, (143-202.)
- [12] YURI GUREVICH – SAHARON SHELAH: *Fixed-point extensions of first-order logic*. IEEE Symp. on FOCS, 1985, (346-353.)
- [13] J. W. LLOYD: *Foundations of Logic Programming* Springer-Verlag, Berlin, 1987

- [14] VILÉM NOVÁK: *Fuzzy sets and their applications*. Adam Hilger Bristol and Philadelphia, 1989
- [15] PÁSZTORNÉ VARGA KATALIN: *A matematikai logika és alkalmazásai*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1986
- [16] MARIA I. SESSA: *Approximate reasoning by similarity-based SLD resolution*. Theoretical Computer Science **275**, 2002, (389-426.)
- [17] MICHAEL SCHROEDER – RALF SCHWEIMEIER: *Arguments and Misunderstandings: Fuzzy. Unification for Negotiating Agents*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science, Vol. **70** (5), 2002, Elsevier, Proceedings of the ICLP workshop CLIMA02, Copenhagen, Aug. 2002.
- [18] J. D. ULLMAN: *Principles of database and knowledge-base systems*. Computer Science Press, Rockville, 1988
- [19] HARRY E. VIRTANEN: *Fuzzy unification*. 5th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, Paris, 1994. July 4-8
- [20] HARRY E. VIRTANEN: *Vague Domains, S-Unification and Logic Programming*. Electronic Notes in Theoretical Computer Science **66** (No. 5), 2002, URL: <http://www.elsevier.nl/locate/entcs/volume66.html>, 18 page

(Beérkezett: 2005. július 15.)

ACHS ÁGNES
PTE-PMMK
PÉCS, BOSZORKÁNY U. 2.
achs@witch.pmmf.hu

FUZZY KNOWLEDGE-BASE WITH FUZZY DATALOG

ÁGNES ACHS

In this paper there is given a possible model of handling uncertain information by defining fuzzy knowledge-base as a quadruple of a background-knowledge, a deduction mechanism, a decoding set and some modifying algorithm which connects the background knowledge to the deduction mechanism. We defined two kind of modifying algorithm, and gave evaluation strategies of them. Possibly this evaluation strategy can be improved, or maybe there is a better modifying algorithm. To find these better solutions will be the work of a possible further development.

DISZKTRÉT DINAMIKUS RENDSZEREK ÉS KÁOSZ

KOLUMBÁN JÓZSEF ÉS SOÓS ANNA

Kulcsszavak: diszkrét dinamikus rendszer, fraktál, káosz, invariáns halmaz.

AMS2000: 37E15, 37F10

E cikk célja a diszkrét dinamikus rendszerek elmélete néhány alapfogalmának – köztük a káosznak – bemutatása. A fogalmak ismertetése után a káosz három tulajdonságát szemléltetjük a sátorfüggvény és komplex dinamikus rendszerek esetén.

1. Alapfogalmak

Értelmezzük a diszkrét dinamikus rendszer fogalmát és bemutatjuk alapvető tulajdonságait.

Legyen X a valós számok vagy a komplex számok valamely nem üres részhalmaza a szokásos d eukleidészi távolsággal. Az $f : X \rightarrow X$ folytonos függvényt az (X, d) metrikus téren értelmezett **diszkrét dinamikus rendszernek** nevezzük és $[X, f]$ -fel jelöljük. A diszkrét dinamikus rendszerben egy $x_0 \in X$ pont **pályája** az az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat, melyet a következő rekurzív képlettel értelmezzünk:

$$x_0, x_1 := f(x_0), x_2 := f(x_1), \dots, x_n := f(x_{n-1}), \dots$$

vagy másképpen írva,

$$x_n = f^n(x_0),$$

ahol f^n az f függvény n . iteráltja.

Az $x \in X$ pont az $[X, f]$ diszkrét dinamikus rendszer **periodikus pontja**, ha létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $f^n(x) = x$. Az n számot az x **periódusának** nevezzük. Azonnal belátható, ha n periódusa x -nek, akkor annak bármely többszöröse is periódusa lesz x -nek. A legkisebb periódust az x **főperiódusának** nevezzük.

Az $x \in X$ pontot az f **fixpontjának** nevezzük, ha $f(x) = x$. Minden fixpont periodikus, 1 periódussal.

Közismert, hogy ha az $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ folytonos függvény, akkor létezik fixpontja. Fixpontok létezésére vonatkozik a Banach-féle kontrakciós tétel is.

Az f függvény **kontrakció**, ha létezik olyan $\alpha \in]0, 1[$, amelyre

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \text{ minden } x, y \in X \text{ esetén.}$$

1.1. TÉTEL. (Banach-féle fixpont tétel speciális esete) *Tételezzük fel, hogy X zárt halmaz és $f : X \rightarrow X$ kontrakció. Ekkor f -nek egyetlen fixpontja van. Mi több, minden $x_0 \in X$ pályája ehhez a fixponthoz konvergál.*

Valójában fixpontok létezéséhez elegendő egyetlen pálya konvergenciája is.

1.2. TÉTEL. *Legyen x^* az $[X, f]$ diszkrét dinamikus rendszerben valamely x_0 pont pályájának határértéke. Ha f folytonos függvény, akkor x^* fixpont.*

Bizonyítás. Értelmezés szerint $x_n = f(x_{n-1})$. Térjünk határértékre az egyenlőség mindkét oldalán és használjuk fel az f folytonosságát. Ekkor $x^* = f(x^*)$. \square

A periodikus pontok létezésével kapcsolatban megemlítjük Sharkovsky [14] híres tételét.

1.3. TÉTEL. *A természetes számok halmazában értelmezzük a következő rendezési relációt:*

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ \dots \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \dots \succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ \dots \\ \dots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1.$$

Tételezzük fel, hogy $[a, b] \subset \mathbb{R}$ adott intervallum, $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ folytonos függvény és létezik n főperiódusú pont. Ekkor $n \succ m$ szükséges és elégséges ahhoz, hogy létezzen m periódusú pont is.

Ebből a tételből következik, hogy ha van 3 főperiódusú pont, akkor van akárhány periódusú is.

A [6] dolgozatban a Sharkovsky tétel újabb bizonyítását találjuk.

Az $x^* \in X$ periodikus pont, melynek legkisebb periódusa k , **vonzó**, ha létezik az x^* -nak olyan V környezete, amelyre minden $x \in V$ esetén az $[X, f^k]$ rendszerben az x -ból induló pálya határértéke x^* . A legnagyobb ilyen V környezetet az x periodikus pont **vonzási tartományának** nevezzük. Az x^* pontot **taszító periodikus pontnak** nevezzük, ha létezik x^* -nek olyan V környezete, hogy bármely $x \in V$ esetén van olyan $x = x_0, x_{-1}, x_{-2}, \dots, x_{-n}, \dots$ sorozat, amelynek x^* határértéke és $x_{-n} = f^k(x_{-n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Az x^* pont **semleges**, ha se nem vonzó, se nem taszító.

Abban az esetben, ha $X \subset \mathbb{R}$ intervallum, és az f folytonosan deriválható függvény, a periodikus pontok természetét a derivált segítségével is vizsgálhatjuk.

1.4. TÉTEL. *Legyen x^* egy $k \in \mathbb{N}$ periódusú pont. Ha $|(f^k)'(x^*)| < 1$, akkor x^* vonzó, ha $|(f^k)'(x^*)| > 1$, akkor x^* taszító.*

Bizonyítás. A bizonyítást $k = 1$ esetén végezzük el, de hasonlóan végezhető nagyobb k esetén is. Az f' folytonosságából következik, hogy $|f'(x^*)| < 1$ akkor és csak akkor igaz, ha létezik $\epsilon > 0$ és $0 < \alpha < 1$ szám, amelyre $|f'(x)| < \alpha$ minden $x \in U =]x^* - \epsilon, x^* + \epsilon[$ esetén. Azt kell bizonyítani, hogy $f^n(x) \rightarrow x^*$ minden $x \in U$ esetén. Alkalmazzuk az

$$(f^n)'(x) = f'(f^{n-1}(x)) \cdot \dots \cdot f'(f(x)) \cdot f'(x)$$

láncszabállyal kombinált középérték tételt és felhasználjuk, hogy x^* fixpont. Ezért létezik x és x^* között olyan ξ pont, amelyre

$$|f^n(x) - x^*| = |f^n(x) - f^n(x^*)| = |f'(\xi)|^n |x - x^*| \leq \alpha^n.$$

A második állítás igazolása hasonlóan történik. \square

Ha $|(f^k)'(x^*)| = 1$, akkor az x^* -ot **neutrális** periodikus pontnak szokás nevezni. Egy neutrális pont lehet vonzó, taszító vagy semleges.

2. Az exponenciális függvény dinamikája

Első példaként tekintsük az exponenciális függvényt. Legyen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := a^x, \text{ ahol } a > 0.$$

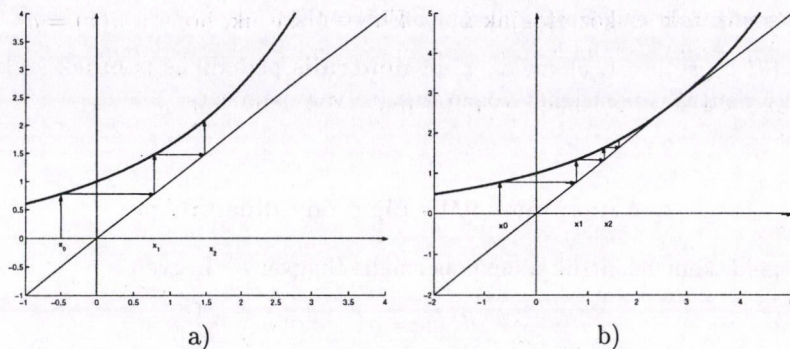
A pályát az a paraméter függvényében fogjuk tanulmányozni.

2.1. TÉTEL.

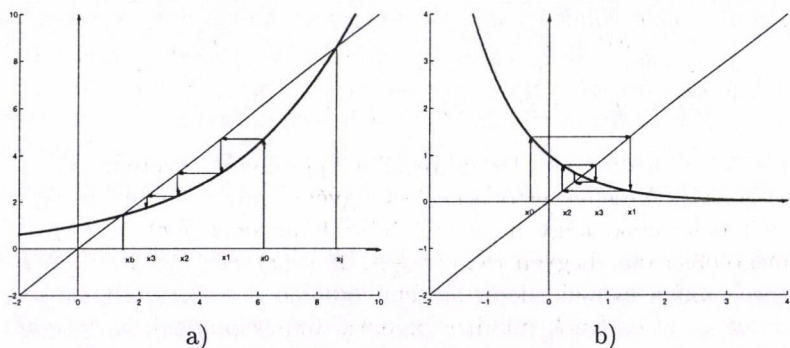
- (1) Ha $a > e^{\frac{1}{e}}$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ pályája szigorúan növekvő és $+\infty$ -hez tart.
- (2) Ha $a = e^{\frac{1}{e}}$, akkor e az egyetlen fixpontja az $[X, f]$ diszkrét dinamikus rendszernek és ez közömbös. Ha $x_0 \leq e$, akkor a pályája növekvő és e -hez tart, ha $x_0 > e$, akkor a pályája szintén növekvő és $+\infty$ -hez tart.
- (3) Ha $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$, akkor két fixpont létezik, x_b és x_j , $x_b < e < x_j$. Az x_b vonzó, x_j pedig taszító fixpont. Ha $x_0 \leq x_b$, akkor pályája növekvő és x_b -hez tart, ha $x_b < x_0 < x_j$, akkor pedig csökkenő és szintén x_b -hez tart. Ha $x_0 = x_j$ akkor a pálya állandó, ha $x_0 > x_j$, akkor a pálya szigorúan növekvő és $+\infty$ -hez tart.
- (4) Ha $a = 1$, akkor minden pont pályája állandó.
- (5) Ha $e^{-e} \leq a < 1$, akkor egyetlen x^* fixpont van, és minden pont pályája ehhez tart. A pálya páros indexű és páratlan indexű tagok sorozatára bomlik, az egyik növekvő, a másik csökkenő.
Ha $e^{-e} = a$, akkor $x^* = \frac{1}{e}$, és ez neutrális.
- (6) Ha $0 < a < e^{-e}$, akkor egyetlen x^* fixpont van, és ez taszító. A pálya páros indexű és páratlan indexű tagok sorozatára bomlik, ezek konvergensek, de határértékük különböző. Pontosabban, ha $g(x) = a^{a^x}$, akkor g -nek három

fixpontja van: $x < x^* < y$. Ha $x_0 < x$, akkor az (x_{2n}) szigorúan növekvő sorozat és határértéke x , az (x_{2n+1}) sorozat szigorúan csökkenő és határértéke y . Ha $x_0 = x$, akkor mindkét részsorozat állandó, $x_{2n} = x$, $x_{2n+1} = y$. Ha $x < x_0 < x^*$, akkor az (x_{2n}) szigorúan csökkenő sorozat és határértéke x , az (x_{2n+1}) sorozat szigorúan növekvő és határértéke y . Az $y > x_0 > x^*$ és $x_0 > y$ esetek az előbbieket duálisai.

Bizonyítás. Igazoltuk, hogy ha egy pálya konvergens, akkor a határérték fixpont, tehát megoldása az $a^x = x$ egyenletnek. Ez egyenértékű a $\ln a = \frac{\ln x}{x}$ egyenlet megoldásával. Ábrázoljuk a $\varphi(x) := \frac{\ln x}{x}$ függvényt. Ennek maximuma $\frac{1}{e}$, és azt e -ben éri el. Ha $\ln a > \frac{1}{e}$, akkor nincs fixpont, ellenkező esetben van.



1. ábra. $f(x) = a^x$, a) $a > e^{\frac{1}{e}}$ b) $a = e^{\frac{1}{e}}$



2. ábra. $f(x) = a^x$, a) $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ b) $0 < a < 1$

(1) Ha $\ln a > \frac{1}{e}$, azaz $a > e^{\frac{1}{e}}$, akkor az f grafikonja az első szögfelező fölött van, ezért $x_0 \in \mathbb{R}$ pályája szigorúan növekvő, és fixpont nincs, tehát a határérték végtelen (1.a ábra).

(2) Ha $\ln a = \frac{1}{e}$, az f grafikonja (e, e) pontban érinti az első szögfelezőt és a grafikon a szögfelező fölött helyezkedik el. Ebből következik az állítás (1.b ábra).

(3) Ha $0 < \ln a < \frac{1}{e}$, akkor az $y = \ln a$ a φ grafikonját két pontban metszi; a baloldali x koordinátája legyen x_b , a jobboldalié x_j . Az f grafikonja az első szögfelezőt az (x_b, a^{x_b}) , illetve az (x_j, a^{x_j}) pontban metszi. Ha $x < e$, akkor $0 < f'(x) < 1$, ha $x > e$, akkor $f'(x) > 1$, tehát x_b vonzó, x_j pedig taszító (2.a ábra).

(4) Ha $a = 1$, akkor $f(x) = 1$, így $x = 1$ az egyetlen fixpont.

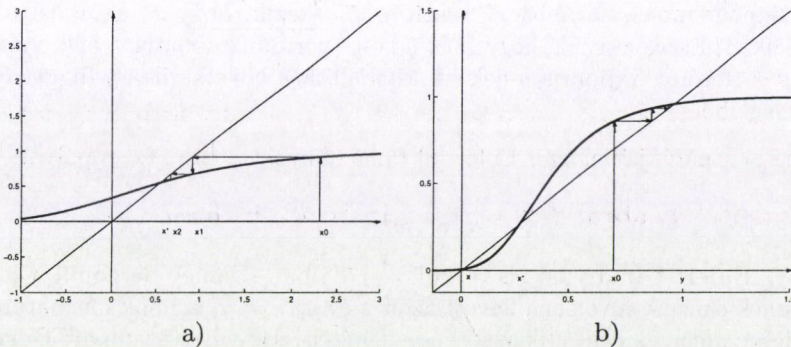
Ha $a < 1$, egyetlen x^* fixpont van, mert az $y = \ln a$ egyenletű egyenes a φ grafikonját egyetlen pontban metszi (2.b ábra).

(5) Ha $e^{-e} \leq a < 1$, akkor

$$x_0, x_2, \dots, x_{2n}, \dots \text{ és } x_1, x_3, \dots, x_{2n+1}, \dots$$

monoton sorozatok, és közrefogják x^* -t. Ehhez belátjuk, hogy a $g(x) = a^{a^x}$ függvény növekvő, $g(x) > x$, ha $x < x^*$ és $g(x) < x$, ha $x > x^*$. Valóban,

$$g'(x) = a^x a^{a^x} (\ln a)^2 > 0, \text{ a } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1.$$



3. ábra. $g(x) = a^{a^x}$, a) $1 > a > e^{-e}$ b) $0 < a < e^{-e}$

Mivel $g''(x) = (\ln a)^3 a^x a^{a^x} (1 + a^x \ln a)$, a g függvénynek egyetlen inflexióspontja van minden $a > 0$ esetén; ettől balra a függvény konvex, jobbra pedig konkáv. Még azt kell belátnunk, hogy ha $e^{-e} \leq a < 1$, akkor a $g(x) = x$ egyenletnek egyetlen megoldása van. Legyen $\psi(x) := \frac{\ln x}{a^x}$. A $\psi'(x) = a^{-x} \left[-\ln a \ln x + \frac{1}{x} \right] \geq 0$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor áll fenn minden $x > 0$ esetén, ha $a \geq e^{-e}$. Figyelembe véve, hogy f -nek minden fixpontja fixpontja g -nek is, és g -nek csak egy van, következik, hogy x_{2n} és x_{2n+1} határértéke x^* (3.a ábra).

(6) Ha $0 < a < e^{-e}$, akkor $f'(x^*) < -1$. Indukcióval igazolható, hogy $x_0 = 1$ esetén

$$a = x_1 < x_3 < \dots < x_{2n+1} < \dots < x_{2n} < \dots < x_2 < 1, \\ a^{x_{2n}} = x_{2n+1} \text{ és } a^{x_{2n-1}} = x_{2n}.$$

Legyen

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} \text{ és } y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n}.$$

Ekkor

$$x \leq y, \quad a^y = x \text{ és } a^x = y.$$

Innen

$$x \ln x = y \ln y.$$

Mivel a $h(x) = x \ln x$ képlettel értelmezett függvénynek $\frac{1}{e}$ minimumpontja és ez a függvény szigorúan konvex, az előbbi egyenletnek legfeljebb két megoldása van. Kimutatjuk, hogy $x < y$ (3.b ábra). Valóban, ha $x = y$, akkor $x = x^*$, mert x^* egyértelmű. De ekkor $g'(x) = x^2(\ln a)^2 = (\ln x)^2 > 1$, ami ellentmond annak, hogy az $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat szigorúan növekvő és x -hez tart. Ebből következik, hogy $x < y$. A

$$\frac{\ln x}{y} = \frac{\ln y}{x} = \frac{\ln x^*}{x^*} = \ln a$$

egyenlőség alapján mindkettő különbözik x^* -tól. Mivel x, x^* , és y fixpontjai g -nek és több fixpont nincs, továbbá x^* taszító, következik, hogy x^* az x és y között helyezkedik el. Észrevesszük, hogy x és y kettő periódusú pontja f -nek. Az x és y vonzó, az x^* taszító fixpontja g -nek. A tétel állítása következik a g függvény fenti tulajdonságaiból. \square

Az $x_0 = a$ pályáját először Euler [8] tanulmányozta, ezért ezt a pályát, vagyis az

$$a, a^a, a^{a^a}, \dots$$

sorozatot, **Euler toronynak** nevezzük. 1728-ban Daniel Bernoulli Christian Goldbergnak címzett levelében felveti azon x és y , $x \neq y$, számok meghatározásának kérdését, amelyek teljesítik az $x^y = y^x$ feltételt. Egy ilyen számpárt **Bernoulli párosnak** nevezünk. Bernoulli azt írta a levélben, hogy egyetlen eset van, amikor ezek a számok egészek ($x = 2, y = 4$), de végtelen sok racionális megoldás létezik. Azt is megjegyezte, hogy vannak irracionális megoldások is, anélkül, hogy ezekről részletesen írt volna. Euler megjegyzi, hogy az

$$x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ és } y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

racionális megoldásai a Bernoulli feladatnak, minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ esetén.

Flechsenaar [10] igazolta, hogy más racionális megoldás nincs. Erre vonatkozóan az olvasó talál információkat a [11] és [4] dolgozatban is. Vegyük észre, hogy ha $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ és az exponenciális függvény két fixpontja x és y , akkor az x és y Bernoulli párost képez. Ezek szerint $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ esetén az exponenciális függvény x_b és x_j fixpontja Bernoulli párost képez, és ezen kívül más valós Bernoulli páros nincs.

A Bernoulli pároshoz hasonlóan, $0 < a < e^{-e}$ esetén létezik olyan (x, y) számpár, amelyre $x \neq y$ és $x^x = y^y$. Egy ilyen számpárt **Euler párosnak** nevezünk. Az előbbi tétel bizonyításából következik, hogy ezek g -nek fixpontjai. Könnyen igazolható, hogy (x, y) akkor és csak akkor Euler páros, ha $(\frac{1}{y}, \frac{1}{x})$ Bernoulli páros.

Goldbach Bernoullihoz küldött levelében a Bernoulli párosok egy parametrikus ábrázolását adta. Ha (x, y) egy ilyen páros és $y > x$, akkor létezik olyan $s > 1$, hogy $y = sx$. Ekkor $x^{sx} = (sx)^x$, vagyis $x^s = sx$, tehát

$$x = s^{\frac{1}{s-1}}, \quad y = s^{\frac{s}{s-1}}.$$

Ehhez hasonlóan, az Euler párosok parametrikus alakja a következő:

$$x = s^{\frac{s}{1-s}}, \quad y = s^{\frac{1}{1-s}}, \quad s > 1.$$

Ezekről a kérdésekről további információkat [1], [7] és [12] dolgozatban olvashatunk.

3. A káosz

Az $A \subseteq X$ nem üres halmazt az $[X, f]$ diszkrét dinamikus rendszer **invariáns halmazának** nevezzük, ha $f(A) = A$, ahol $f(A) := \{y \in X \mid \exists x \in A : f(x) = y\}$. Minden fixpontból képzett halmaz invariáns halmaz. Az A invariáns halmazt a diszkrét dinamikus rendszer **attraktorának** nevezzük, ha létezik olyan A -t tartalmazó V nyílt halmaz, hogy bármely $x \in V$ esetén $f^k(x)$ -nek az A -tól mért távolsága, vagyis,

$$\sup \{ \min \{ d(f^k(v), a) \mid a \in A \} \mid v \in V \}$$

nullához tart, ha k végtelenbe tart. A legnagyobb ilyen V halmazt az A **vonzási tartományának** nevezzük. Például, vonzó fixpontból képzett halmaz attraktor. A taszító fixpont fogalmának általánosításaként, hasonló módon értelmezzük a taszító invariáns halmaz fogalmát is.

Az $[X, f]$ invariáns halmazai gyakran fraktálhalmazok.

Azt mondjuk, hogy f **kaotikusan viselkedik** az A invariáns halmazon, ha a következő három tulajdonság teljesül:

- (i) Létezik olyan $x_0 \in A$, amelynek pályája A -ban sűrű, vagyis A minden elemét tetszőleges pontossággal megközelíti.
- (ii) Az A -beli periodikus pontok halmaza A -ban sűrű.
- (iii) A pálya viselkedése érzékeny a kezdeti feltételekre, vagyis létezik olyan $\delta > 0$, hogy adott $x \in A$ esetén létezik A -ban x -hez tetszőlegesen közeli y pont és $k \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $d(f^k(x), f^k(y)) \geq \delta$. Más szóval, ha a pontok közelednek, a pályák nem feltétlenül közelednek minden határon túl.

A káosz fogalmának értelmezése Devaney [5] művében szerepel először. Utólag Banks és társai [2]-ben kimutatták, hogy a (iii) tulajdonság az első kettő következménye.

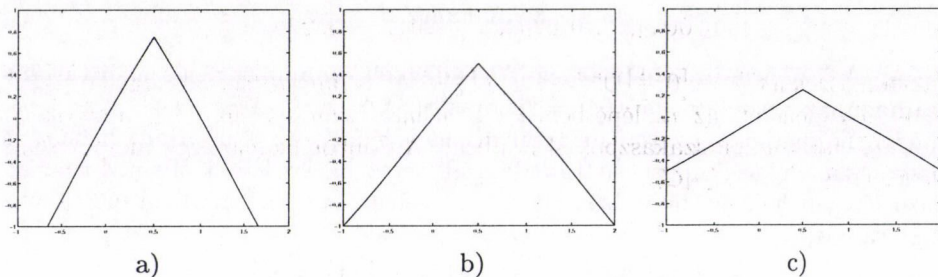
Számítógép segítségével a diszkrét dinamikus rendszerek attraktorait könnyen megjeleníthetjük. Ha adott x kezdőpontra ábrázoljuk az $f^k(x)$ iteráltakat, például $k \geq 100$ esetén, a kapott ábra megközelíti az attraktort, legalábbis szemmel a kapott ponthalmazt nem tudjuk megkülönböztetni az attraktortól.

4. A sátorfüggvény dinamikája

Második példánk legyen a sátorfüggvény. Ha $\lambda > 0$, legyen $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_\lambda(x) := \begin{cases} \lambda x, & \text{ha } x \leq \frac{1}{2} \\ \lambda - \lambda x, & \text{ha } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

A pályák és az invariáns halmaz tanulmányozását a λ paraméter függvényében végezzük.



4. ábra. A sátor függvény a) $\lambda = \frac{3}{2}$ b) $\lambda = 1$ c) $\lambda = \frac{1}{2}$

1) Tekintsük először azt az esetet, amikor $\lambda < 1$. A sátor teteje az első szögfelező alatt helyezkedik el. Az x_0 -ból az x_1 -et úgy származtatjuk, hogy az $(x_0, f(x_0))$ ponton át húzott vízszintes egyenessel metszük az első szögfelezőt és a metszéspontot vetítjük a vízszintes tengelyre. Ha a szerkesztést az $(x_1, f(x_1))$ pontból megismételjük, az x_2 -t kapjuk. Hasonlóan szerkesztjük meg a következő pontokat. Ebben az esetben minden x_0 valós szám pályája konvergens és határértéke 0. Az $A = \{0\}$ invariáns halmaz attraktor, mert az \mathbb{R} minden elemét magához vonzza. (4.c ábra)

2) Ha $\lambda = 1$, akkor minden $x \leq \frac{1}{2}$ fixpontja f -nek. Ezért $A =]-\infty, \frac{1}{2}]$ vonzó invariáns halmaz (4.b ábra).

3) Ha $1 < \lambda \leq 2$, akkor a sátor teteje az első szögfelező felett és az $y = 1$ egyenes alatt helyezkedik el. A grafikont az első szögfelező két pontban metszi,

tehát két fixpont van: 0 és $\frac{a}{a+1}$. Mindkét fixpont tasztító. Könnyen belátható, hogy $A = [0, 1]$ tasztító invariáns halmaz. Mi több, ha $x_0 \in \mathbb{R} \setminus A$, akkor

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x_0) = -\infty \quad (4.a \text{ ábra}).$$

4) Minőségileg új helyzet áll elő, ha $\lambda > 2$. Ekkor a sátor teteje az $y = 1$ egyenes felett helyezkedik el, így a $[0, 1]$ intervallum nem invariáns f -re nézve.

Az invariáns halmaz tanulmányozásához szükségünk van a Cantor-halmaz meghatározására.

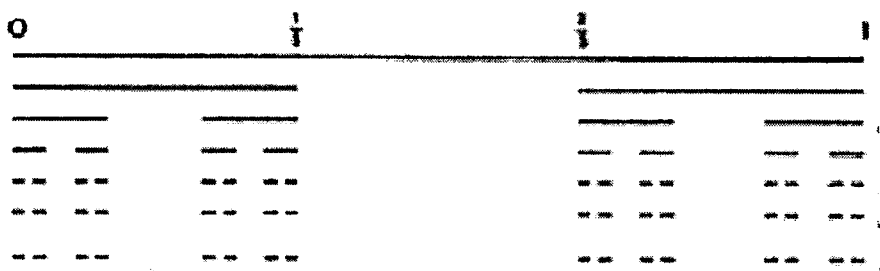
A $[0, 1]$ intervallumból tekintsük azokat a valós számokat, amelyek a hármas számrendszerben az 1-es számjegy felhasználása nélkül ábrázolhatóak. Ezek alkotják a **Cantor-halmazt**:

$$C := \{0, a_1 a_2 \dots a_i \dots \mid a_i \in \{0, 2\}\}.$$

Ha ezeket a számokat ábrázoljuk a számegyenesen, észrevevessük, hogy a vessző után akkor és csak akkor nem szerepel az 1-es számjegy, ha a szám a $[0, 1]$ intervallum első, illetve a harmadik harmadában helyezkedik el. Legyen $C_1 := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Ha a második számjegy sem 1, akkor a számok

$$0,00a_3, \dots, 0,02a_3, \dots, 0,20a_3, \dots, 0,22a_3, \dots$$

alakúak. Ezek a $C_2 := [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ halmazban vannak. Folytatva a gondolatmenetet, az n . lépésben a C_n halmazt szerkesztjük meg, amelyik 2^n darab $\frac{1}{3^n}$ hosszúságú szakaszból áll (. ábra). A Cantor-halmaz ezek metszeteként jelenik meg: $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$.



5. ábra. A Cantor-halmaz megközelítése

Térjünk vissza a sátorfüggvényhez a $\lambda = 3$ paraméter esetén. Ha $x_0 \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$, akkor $f^n(x_0)$ határértéke $-\infty$. Ugyanez a helyzet, ha $x_0 \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, ugyanis ekkor

$f(x_0) > 1$. Indukcióval igazolható, hogy ha $x_0 \in \mathbb{R} \setminus C$, akkor létezik olyan $p \in \mathbb{N}$, amelyre $f^p(x_0) \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$, tehát $f^n(x_0)$ határértéke $-\infty$.

4.1. TÉTEL. A C (taszító) invariáns halmaz f -re nézve.

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in C$. Először igazoljuk, hogy C invariáns f -re. Valóban, ha $x \in C$, akkor ternáris ábrázolása $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ alakú, ahol $a_n \in \{0, 2\}$ minden n esetén. Két esetet különböztetünk meg. Ha $x \in [0, \frac{1}{3}]$, akkor $a_1 = 0$ és $f(x) = 3x = 0, a_2 \dots a_n \dots$, tehát $f(x) \in C$. Ha $x \in [\frac{2}{3}, 1]$, akkor $a_1 = 2$, $1 - x = 0, 0b_2 \dots b_n \dots$ és $f(x) = 3(1 - x) = 0, b_2 \dots b_n \dots$, ahol $b_n \in \{0, 2\}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Következésképpen $f(C) \subseteq C$. A fordított reláció igazolására tételezzük fel, hogy $y \in C$. Ismét két eset lehetséges. Ha $y \in [0, \frac{1}{3}]$, akkor $x = \frac{y}{3}$ szintén eleme C -nek és $f(x) = y$, tehát $y \in C$. Ha $y \in [\frac{2}{3}, 1]$, akkor $x = 1 - \frac{y}{3}$ eleme C -nek és $f(x) = y$, tehát $y \in f(C)$ ebben az esetben is. Következik, hogy $f(C) = C$.

A C taszító, mert ha $x_0 \in \mathbb{R} \setminus C$, akkor $f^n(x_0)$ határértéke $-\infty$, függetlenül attól, hogy milyen közel van x_0 a C -hez. \square

A fenti bizonyításból látható, hogy ha $a_k = 0$, akkor $f^k(x) = 0, a_{k+1} a_{k+2} \dots$. A fentiekhez hasonlóan igazolható, hogy ha g_1 és g_2 -vel jelöljük az f leszűkítéseinek inverzét,

$$g_1(x) = \frac{x}{3}, \quad g_2(x) = 1 - \frac{x}{3},$$

akkor

$$C = g_1(C) \cup g_2(C),$$

vagyis C önhasonló halmaz.

Igazolhatjuk azt is, hogy

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(I), \quad \text{ahol } I = [0, 1].$$

4.2. TÉTEL. f viselkedése a C halmazon kaotikus.

Bizonyítás. Az (i) igazolásához képezzük az összes olyan véges ternáris törtet, amelyeket a 0 és 2 számjegyekkel szerkeszthetünk. Ezek a következők:

0,0	0,2						
0,00	0,02	0,20	0,22				
0,000	0,002	0,020	0,200	0,022	0,202	0,220	0,222
...

Legyen x_0 az a ternáris tört, amelyet úgy kapunk, hogy a 0 egészrész után a fenti táblázatban szereplő törtet a vesszők elhagyásával egymás után írjuk. Ebben az 1-es nem szerepel, tehát $x_0 \in C$. Az x_0 ábrázolásában minden, 0 és 2 számjeggyel képezhető véges sorozat szerepel, mégpedig úgy, hogy előtte egy 0 van. Legyen $x = 0, a_1 a_2 \dots a_k \dots$ tetszőlegesen választott tört C -ből és $\epsilon > 0$. Tekintsünk egy k

természetes számot, amelyre $1 < 3^k \epsilon$. Mivel az $a_1 a_2 \dots a_k$ véges sorozat x_0 ábrázolásában előfordul, és azt 0 előzi meg, létezik olyan q természetes szám, amelyre $f^q(x_0) = 0, a_1 a_2 \dots a_k b_{k+1} b_{k+2} \dots$ alakú. Következésképpen,

$$|f^q(x_0) - x| < 3^{-k} < \epsilon.$$

Ezzel igazoltuk, hogy x_0 pályája C -ben sűrű. Figyelembe véve, hogy minden k esetén $0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} 0 a_1 a_2 \dots a_{k-1} 0 a_1 a_2 \dots a_{k-1} \dots$ k periódusú pont, következik, hogy a periodikus pontok halmaza sűrű C -ben.

A (iii) tulajdonság igazolásához legyen $\delta = \frac{1}{3}$. Tetszőleges k természetes szám és $x = 0, a_1 a_2 \dots a_k \dots$ esetén tekintsük az $y = 0, a_1 a_2 \dots a_k b_{k+1} b_{k+2} \dots$ Cantor-számot, ahol $b_{k+1} \neq a_{k+1}$. Ekkor

$$|x - y| < 3^{-k} \text{ és } |f^k(x) - f^k(y)| \geq \frac{1}{3}.$$

□

Igazolható, hogy minden $\lambda > 2$ esetén létezik egy Cantor-típusú invariáns halmaz, és az f viselkedése ezen szintén kaotikus. Az is bizonyítható, hogy ha $1 < \lambda \leq 2$, akkor az f a $[0, 1]$ intervallumon kaotikusan viselkedik.

5. Komplex dinamikus rendszerek

A komplex számsíkon értelmezett dinamikus rendszerek invariáns halmazai igen gyakran fraktálhalmazok. Az olyan egyszerű függvény esetén is, mint az $f(x) = x^2 + c$, ahol c konstans, bonyolult invariáns halmazokhoz jutunk (lásd a 11. Ábrát).

Tekintsük az $n \geq 2$ fokszámú $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ polinomfüggvényeket:

$$f(z) := a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n.$$

A komplex dinamikus rendszerek elmélete racionális függvények esetén is hasonló. Az f függvényhez tartozó **Julia-halmaz** a taszító periodikus pontok halmazának zárt burkolója. Ezt a halmazt $J(f)$ -fel fogjuk jelölni. A Julia-halmaz kiegészítő halmazát **Fatou-halmaznak** nevezzük, és $F(f)$ -fel jelöljük.

A következőkben a Julia-halmaz tulajdonságait mutatjuk be. Megmutatjuk, hogy invariáns az f -re és annak inverzére, és f a $J(f)$ -n kaotikusan viselkedik.

A legegyszerűbb eset, ha $f(z) = z^2$. Ekkor $f^k(z) = z^{2^k}$. A k periódusú pontok

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid z = e^{\frac{2\pi i l}{(2^k - 1)}}, 0 \leq l < 2^k - 2 \right\}$$

halmaz elemei. Ezek taszító pontok, mert $\left| (f^k)'(z) \right| = 2$. Tehát

$$J(f) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Ebben az esetben azonnal következik, hogy

$$J(f) = f(J(f)) = f^{-1}(J(f)).$$

Ha $|z| < 1$, akkor

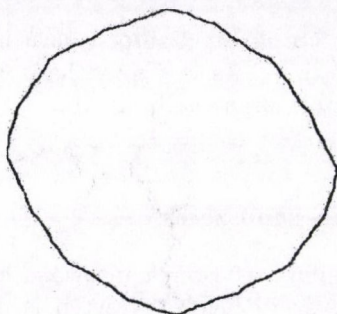
$$f^k(z) \rightarrow 0, \quad (k \rightarrow \infty),$$

és ha $|z| > 1$, akkor $f^k(z) \rightarrow \infty$, de $f^k(z) \in J(f)$, ha $|z| = 1$.

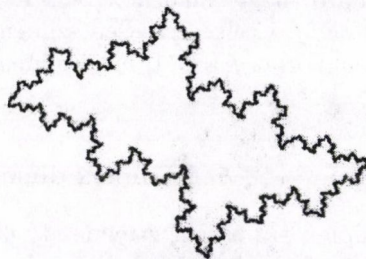
Legyen $c \in \mathbb{C}$, és értelmezzük az f függvényt a következő képlettel:

$$f(z) := z^2 + c.$$

Ekkor kis $|z|$ esetén $f^k(z) \rightarrow w$, ahol w az f 0-hoz közeli fixpontja, és $f^k(z) \rightarrow \infty$, ha z nagy. A Julia-halmaz ebben az esetben is a két vonzási tartomány határpontjainak halmaza (6. ábra).

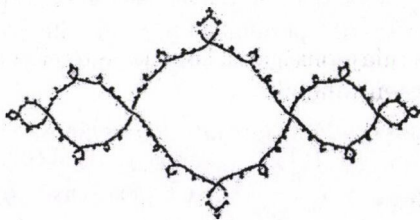


a)

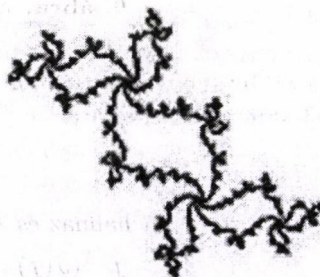


b)

6. ábra. a) $c = -0,1 + 0,1i$ b) $c = -0,5 + 0,5i$

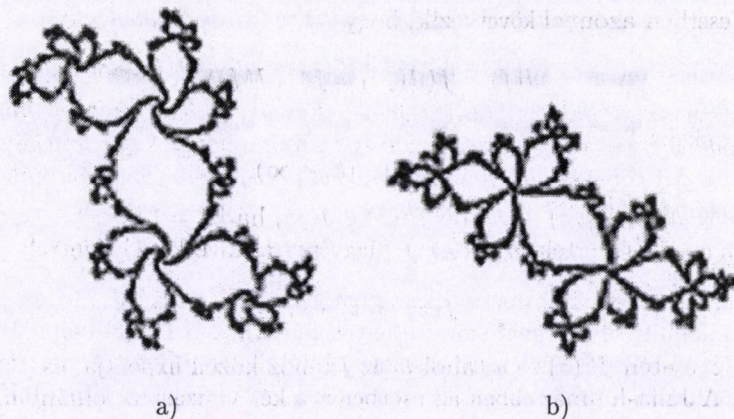


a)

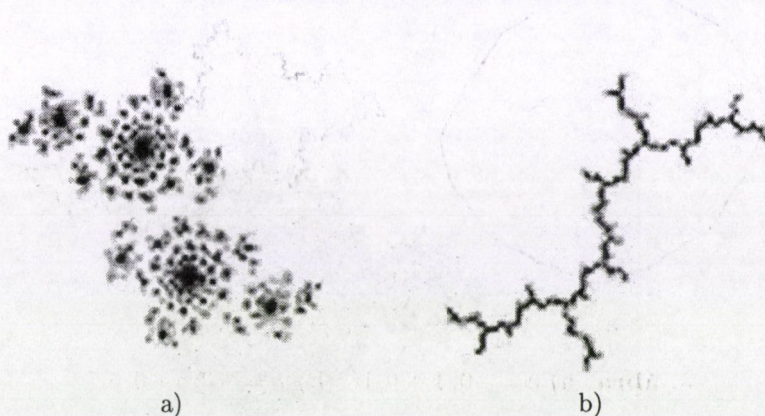


b)

7. ábra. a) $c = -0,1 + 0,05i$ b) $c = -0,2 + 0,75i$



8. ábra. a) $c = 0,25 + 0,52i$ b) $c = -0,5 + 0,55i$



9. ábra. a) $c = 0,66i$ b) $c = -i$

Az f polinomhoz tartozó Julia-halmaz tulajdonságait a következő tételben foglalhatjuk össze. (A bizonyítást a [9] könyvben találjuk.)

5.1. TÉTEL.

- $J(f)$ kompakt halmaz és $J(f) \neq \emptyset$.
- $J = f(J(f)) = f^{-1}(J(f))$, vagyis J invariáns f -re és f^{-1} -re is.
- $J(f^p) = J(f)$ minden $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ esetén.
- $J(f)$ belseje üres.
- $J(f)$ perfekt halmaz (zárt és nincsenek izolált pontjai), tehát megszámlálhatatlan.

f) Ha w vonzó fixpontja f -nek, akkor $\partial A(w) = J(f)$, ahol

$$A(w) := \{z \in \mathbb{C} \mid f^k(z) \rightarrow w, \text{ ha } k \rightarrow \infty\}$$

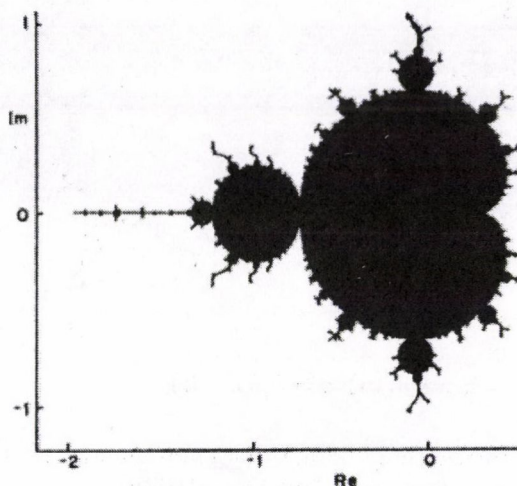
és ∂A az A halmaz határát jelöli. Ezt azt jelenti, hogy a Julia-halmaz minden egyes vonzó fixpont vonzási tartományának határpontjaival egyezik meg. Mi több, a Julia-halmaz minden pontja határpontja minden vonzási tartománynak.

g) Ha $z \in J(f)$, akkor $J(f)$ az $\cup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$ zárt burkolója.

Az értelmezés szerint a periodikus pontok halmaza sűrű $J(f)$ -ben. Másrészt $J(f)$ -ben találunk olyan pontokat, amelyek pályája sűrű $J(f)$ -ben. Igazolható, hogy a pálya viselkedése érzékeny a kezdeti feltételekre $J(f)$ -n.

A Julia-halmazokkal kapcsolatban meg kell említenünk a **Mandelbrot-halmazt** (10. ábra). Ha $f_c(z) := z^2 + c$, akkor legyen M azon c pontok halmaza, amelyekre a hozzátartozó $J(f_c)$ Julia-halmaz összefüggő:

$$M := \{c \in \mathbb{C} \mid J(f_c) \text{ összefüggő}\}.$$



10. ábra. Mandelbrot-halmaz

Az értelmezés alapján elég nehéz megjeleníteni a Mandelbrot-halmazt.

A következő tétel a Mandelbrot-halmaz olyan jellemzését adja, amely segítségével lehetővé válik a számítógépes megjelenítés.

5.2. TÉTEL.

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid \text{a } 0 \text{ pályája } f_c\text{-ben korlátos}\} = \{c \in \mathbb{C} \mid f_c^k(0) \not\rightarrow \infty, \text{ ha } k \rightarrow \infty\}.$$

Vizsgáljuk meg a Julia-halmaz alakját, ha c paraméter a komplex síkban változik.

Egy periodikus pályát **vonzónak** nevezünk, ha a megfelelő periodikus pont vonzó.

A vonzó periodikus pontok meghatározzák a $J(f_c)$ alakját. Igazolható, hogy, ha $w \neq \infty$ vonzó periodikus pont, akkor létezik olyan z kritikus pontja f_c -nek ($f'_c(z) = 0$), amelyre $f^k(z)$ a w -t tartalmazó periodikus pályához tart. Figyelembe véve, hogy 0 az egyetlen kritikus pontja f_c -nek, legfeljebb egy vonzó periodikus pálya lehet. Ha $c \notin M$ az 5.2. Tétel értelmében $f_c^k(0) \rightarrow \infty$, tehát f_c -nek nincsen periodikus pályája.

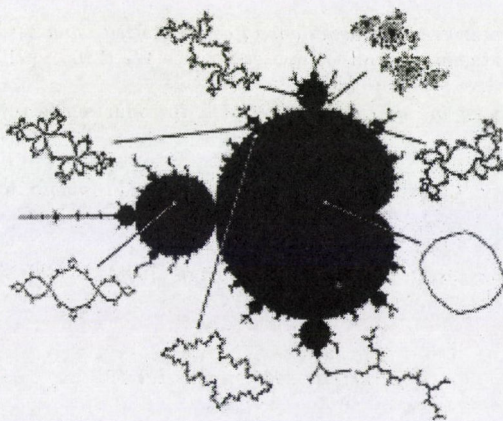
A Julia-halmazokat tanulmányozhatjuk az szerint, hogy mennyi a periódusa azoknak a pontoknak, amelyeknek pályája vonzó. Ha $c \notin M$, akkor nincs vonzó pálya, tehát $J(f_c)$ nem összefüggő. Pontosabban:

Ha $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$, akkor $J(f_c)$ széteső.

Ha $|c| < \frac{1}{4}$, akkor $J(f_c)$ egyszerű zárt görbe. Ekkor c a Mandelbrot-halmaz belsejében van (7. és 8. ábra).

Ha $|c + 1| < \frac{1}{2}$, akkor létezik kettő periódusú vonzó pálya. Ekkor f_c^2 negyedfokú polinom, tehát f_c -nek két fixpontja és két 2 periódusú periodikus pontja van. Legyenek ezek w_1 és w_2 . Ekkor a w_i vonzástartománya egy egyszerű zárt C_i görbe által határolt halmaz, $i \in \{1, 2\}$. A Julia-halmaz tulajdonságai alapján $C_i \subset J(f_c^2) = J(f_c)$.

Hasonlóan tanulmányozhatjuk $J(f_c)$ alakját a p periódusú vonzó pályák létezése esetén (9. ábra).



11. ábra. Julia-halmazok

A 11. ábra a Julia-halmazok alakját a c -nek a Mandelbrot halmazban elfoglalt helye szerint szemlélteti.

Hivatkozások

- [1] J. ANDERSON: *Iterated exponentials*. The American Mathematical Monthly 111 (2004) 8, (668-679.)
- [2] J. BANKS – J. BROOKS – G. CAIRNS – G. DAVOS – P. STACEY: *On Devaney's Definition of Chaos*. The American Mathematical Monthly 99 (1992) 4, (332-334.)
- [3] M. F. BARNLEY: *Fractals Everywhere*. Academic Press (1988)
- [4] M. A. BENNETT: *Positive Rational Solutions to $x^y = y^{mx}$* . The American Mathematical Monthly 111 (2004) 1, (13-21.)
- [5] R. L. DEVANEY: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley, (1989)
- [6] R. L. DEVANEY ET AL: *Playing Cath-Up with Iterated Exponentials*. The American Mathematical Monthly 111 (2004), 8, (704-708.)
- [7] BAU-SEN DU: *A Simple Proof of Sharkovsky's Theorem*. The American Mathematical Monthly 111 (2004), 7, (595-599.)
- [8] L. EULER: *De formulis exponentialibus replicatis*. Acta Scientiarum Petropolitanae 1 (1778), (38-60.)
- [9] K. J. FALCONER: *Fractal geometry*. John Wiley, (1990)
- [10] A. FLECHENHAAR: *Über die Gleichung $x^y = y^x$* . Unterricht für Math. 17 (1911), (70-73.)
- [11] S. HURWITZ: *On the rational solutions of $m^n = n^m$ with $m \neq n$* . The American Mathematical Monthly 74 (1967), (298-300.)
- [12] L. LÓCZI: *Two centuries of the equations of commutativity and associativity of exponentiation*. Teaching Mathematics and Computer Science 1/2 (2003), (219-233.)
- [13] J. MILNOR: *Dynamics in one complex variable*. Introductory lectures, Vieweg, Braunschweig, (1999)
- [14] A. N. SHARKOWSKY: *Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself*. Ukrain Mat. Zh. 16 (1964), (61-71.)
- [15] T. TÉL: *A káosz természetrajza*. Természet Világa (1998), 9, (386-388.)

(Beérkezett: 2005. augusztus 12.)

KOLUMBÁN JÓZSEF ÉS SOÓS ANNA
 BABES-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM,
 MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR
 KOLOZSVÁR
 asoos@math.ubbcluj.ro

DISCRETE DYNAMICAL SYSTEMS AND CHAOS

JÓZSEF KOLUMBÁN AND ANNA SOÓS

In the last decades there has been an explosion of interest in the dynamical systems. This is due to its applications in biology, economics, engineering, physics, etc. and to the availability of powerful computers.

Our goal in this article is to illustrate by some examples (like the exponential function, tent function, and complex polynomial functions) the basic notions (as periodic point, invariant set and chaos) of discrete dynamical systems theory.

ÁTPAKOLÁST HASZNÁLÓ SZEMI-ON-LINE LÁDAPAKOLÁSI ALGORITMUSOK

BALOGH JÁNOS, GALAMBOS GÁBOR

A cikkben az egydimenziós szemi-on-line ládapakolási feladattal foglalkozunk. Ennél a feladatnál az elemek on-line elpakolásával egyidejűleg megengedünk bizonyos műveleteket a már elpakolt elemeken is. Minden pozitív egész k értékre definiálunk egy algoritmust, amely minden lépésben legfeljebb k elemet pakol át. Bebizonyítjuk, hogy az algoritmus-sorozat aszimptotikus versenyképessége $\frac{3}{2} + \frac{1}{6k-1}$.

1. Bevezetés

A ládapakolási feladat jól ismert kombinatorikus optimalizálási probléma. Ennek egydimenziós esetében adott méretük szerint a $(0,1]$ intervallumba eső tárgyak (elemek) egy $L = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ listája, és rendelkezésre áll végtelen sok, egység kapacitású láda. A feladat minden x_i elemet hozzárendelni pontosan egy ládához úgy, hogy a ládabeli elemek méreteinek összege nem haladhatja meg a láda kapacitását. A cél minimalizálni a felhasznált ládák számát (azon ládákét, amelyekben legalább egy elem van a teljes lista elpakolása után). Jól ismert tény, hogy optimális pakolást találni NP-nehéz feladat [5]. Ezért indokolt polinomiális idejű, elfogadható közelítést adó algoritmusok vizsgálata. Ezek egy osztályát alkotják az on-line algoritmusok, amelyek végrehajtásakor az elemeket érkezésük sorrendjében pakoljuk el úgy, hogy semmit nem tudunk a lista további elemeiről. (Sem az elemek száma, sem a később érkező elemek mérete sem ismert.) Az egyszer elpakolt elemek az algoritmus során többet nem mozgathatók. Az off-line algoritmusok teljes információval rendelkeznek a listáról, amelyet a stratégiájuk kialakításánál figyelembe is vesznek. Az úgynevezett szemi-on-line algoritmusok az on-line és az off-line között helyezkednek el [1]. Ezen algoritmusoknál a következő műveletek legalább egyike megengedett:

- elemek átpakolása [3, 4, 8, 9],
- néhány következő elem megvizsgálása ("előrenézése", [6, 7]),
- vagy néhány elem (elő)rendezése [2].

A ládapakolási algoritmusok hatékonysága különböző módszerekkel mérhető. Jelen cikkünkben az aszimptotikus versenyképességi vizsgálatra szorítkozunk. Jelölje $A(L)$ egy A algoritmus által valamely L lista elemeinek elpakolásánál felhasznált ládák számát, és $OPT(L)$ egy optimális pakolás által felhasználtakét. Legyen

$$R_m(A) := \max \left\{ \frac{A(L)}{m} \mid OPT(L) = m \right\}.$$

Ekkor

$$R_\infty(A) := \limsup_{m \rightarrow \infty} R_m(A)$$

– amit $R(A)$ -val fogunk jelölni – mutatja az A algoritmus *aszimptotikus versenyképességét* (AVK). Az on-line ládapakolási algoritmusok AVK-jára ismert legjobb alsó korlát 1,5401 [13], míg a legjobb ismert AVK-jú algoritmus, a Harmonic++ Seiden nevéhez fűződik [12]. Az általa elemzett algoritmusra bebizonyította, hogy: $R(\text{Harmonic}++) \leq 1,58889$.

Időrendi sorrendben az első szemi-on-line ládapakolási algoritmust Galambos adta meg [2] az on-line ládapakolási feladat azon megszorítására, amikor csak korlátos számú láda lehet egyszerre nyitva. (Egy láda lezárt, ha már nem pakolhatunk bele később.) Ez az algoritmus két bufferládát használ az elemek átmeneti tárolására. Ezt javítva Galambos és Woeginger [3] definiált egy, 3 bufferládát használó algoritmust, amelynek AVK-ja 1,6910.

Átpakolást használó szemi-on-line ládapakolási algoritmusokat vizsgáltak Gambosi és szerzőtársai [4]-ben. Megadtak egy lineáris idejű és 1,5-es AVK-jú, valamint egy $O(n \log n)$ időkomplexitású 4/3-os AVK-jú algoritmust. Utóbbi eredmény javítása Ivkovič és Lloyd 5/4-os AVK-jú algoritmus [9]. Nagyon fontos azonban megjegyezni, hogy mindegyik említett szemi-on-line algoritmusban lépésként nem csak konstans számú elem elpakolása történik. Valamennyi, [4]-beli és [9]-beli algoritmusnál „parányi” elemek „kötegeinek” átpakolása egységnyi költségű műveletnek van definiálva, azaz olyan elemek átpakolását engedik meg egy lépésben, amelyekre a tárgyak méreteinek összege egy adott korlát alatt marad.

Jelen dolgozatban is olyan szemi-on-line ládapakolási algoritmusokkal foglalkozunk, amelyek megengedik az átpakolást. Az általunk vizsgált algoritmusokban bármely elem minden egyes átpakolása (újrapakolása) egységnyi költségű, és a listaelemenként átpakolható elemek maximális száma egy előre megadott k értékkel korlátozható. Ezek a *k-átpakolásos szemi-on-line ládapakolási algoritmusok*.

A ládapakolás irodalma iránt érdeklődő olvasónak pl. Coffmann és szerzőtársainak 1999-es áttekintő tanulmánya ajánlható [1], amely további szemi-on-line ládapakolási algoritmusokat is tárgyal.

A következőkben k -átpakolásos szemi-on-line ládapakolási algoritmusok egy sorozatát adjuk meg. Minden $k \in \mathbb{N}^+$ -re definiálunk algoritmust, amelyet angol nevének rövidítésével – *Uniform Fit with k-repacking* – *UF-k* jelöljük, és amelyre $R(\text{UF-k}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{6k-1}$ teljesül. Az algoritmus versenyképessége a $k = 1$ és $k = 2$ esetekre irreleváns, mivel a legjobb ismert on-line algoritmus jobb AVK-val rendelkezik. Az első érdekes eredmény a $k = 3$ paraméterhez tartozik, mivel erre

$R(UF-3) = 1,5588 \dots$ teljesül, amely jobb, mint a ma ismert legjobb on-line algoritmus [12] AVK-ja. Ennek másik értéke, hogy alatta van az úgynevezett *Harmónikus Fit típusú* on-line ládapakolási algoritmusok 1,583...-as alsó korlátjának [11]. A $k = 5$ eset szintén javítás, mivel az *UF-5* algoritmus jobb AVK-val rendelkezik, mint a legjobb ma ismert on-line alsó korlát ($R(UF-5) = 1,53448 \dots$). Ez az első eredmény, amely azt bizonyítja, hogy egy lépésenként konstans számú elem átpakolását megengedő, szemi-on-line algoritmus versenyképessége jobb lehet bármely on-line algoritmusénál. Ez lényegében azt jelenti, hogy a rendelkezésünkre álló információt jól ki lehet használni szemi-on-line algoritmusok versenyképességének javítására.

2. Az UF-k algoritmus és bonyolultsága

Ezt a fejezetet néhány jelöléssel és definícióval kezdjük. Ha x az input lista egy tetszőleges elemét jelöli, akkor szintén x -szel hivatkozunk ennek méretére ott, ahol a szöveggörnyezetben ez nem érthető félre, különben $s(x)$ -szel. Egy megnyitott B láda *szintje szint*(B)-vel jelölt, és a tartalmazott elemek méreteinek összege, $0 < \text{szint}(B) \leq 1$. Egy elemet *kis elemnek* nevezünk, ha mérete a $(0, \frac{1}{2}]$ intervallumba esik, ha $x \in (\frac{1}{2}, 1]$, akkor *nagy elemnek*. *Nagy ládának* mondunk egy B ládát, ha tartalmaz egy nagy elemet.

Legyen k egy tetszőleges, rögzített pozitív egész szám. Osszuk fel a $(0, 1]$ intervallumot $3k + 2$ diszjunkt részintervallumra a következő módon:

$$\begin{aligned}
 \left(0, \frac{1}{6}\right] &= \bigcup_{j=1, \dots, k} \left(\frac{j-1}{6k}, \frac{j}{6k}\right] =: \bigcup_{j=1, \dots, k} I_j, \\
 \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right] &=: I_{2k}, \\
 \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] &= \bigcup_{j=1, \dots, k} \left(\frac{2k+j-1}{6k}, \frac{2k+j}{6k}\right] =: \bigcup_{j=1, \dots, k} I_{2k+j}, \\
 \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] &= \bigcup_{j=1, \dots, k} \left(\frac{3k+j-1}{6k}, \frac{3k+j}{6k}\right] =: \bigcup_{j=1, \dots, k} I_{3k+j}, \\
 \left(\frac{2}{3}, 1\right] &=: I_{6k}.
 \end{aligned}$$

Minden egyes intervallumhoz egy-egy ládaosztályt rendelünk hozzá, amelyet rendre \mathcal{B}_j -vel jelölünk. Egy B láda a \mathcal{B}_j ládaosztályba kerül, ha a megnyitáskor benne elhelyezett első elem mérete az I_j intervallumba esik. Ha $B \in \mathcal{B}_j$, $3k + 1 \leq j \leq 4k$, akkor a B láda az algoritmus futása alatt átkerülhet egy másik ládaosztályba is. Az átsorolás akkor történik meg, ha olyan lépés hajtódik végre, amelynek során a lista éppen feldolgozás alatt lévő kis elemét, vagy ha korábban saját osztályába elpakolt kis elemet pakolunk át a \mathcal{B}_j ládaosztályba tartozó nagy B ládába, és ezután már $\text{szint}(B) \notin I_j$.

Ennek az a következménye, hogy egy lista elpakolása során az egyidőben nyitott ládák száma maximum $3k + 2$, de ez a szám dinamikusan változhat: ládákat nyithatunk meg, és ládák üresedhetnek ki. $A(L)$ számításakor csak azokat a ládákat tekintjük megnyitottnak, amelyekben a teljes lista elpakolása után is maradt elem.

Két ládaosztályt, \mathcal{B}_j és \mathcal{B}_l ($1 \leq j \leq 3k$ és $3k < l \leq 6k$), *komplementeknek* nevezzük, ha az osztályokhoz rendelt I_j és I_l intervallumok tetszőleges elemeinek összege nem nagyobb, mint 1. Egy \mathcal{B}_i ládaosztály komplementeinek halmazát $C(\mathcal{B}_i)$ -vel jelöljük ($1 \leq i \leq 6k$). Vegyük észre, hogy $C(\mathcal{B}_{3k}) = \emptyset$ és $C(\mathcal{B}_{6k}) = \emptyset$. Továbbá, egy \mathcal{B}_j ($1 \leq j \leq 3k - 1$), illetve egy \mathcal{B}_l ($3k + 1 \leq l \leq 4k$) ládaosztály legkisebb indexű komplemente \mathcal{B}_{3k} , illetve \mathcal{B}_1 , legnagyobb indexű komplemente \mathcal{B}_{l^*} , ahol $l^* = \min\{4k, 6k - j\}$, illetve \mathcal{B}_{6k-l} .

A következőkben vázlatosan ismertetjük algoritmusunkat: az UF-k alapvetően a Harmonikus Fit (HF) típusú algoritmusoknál alkalmazott szabály szerint [10] pakolja el minden osztály elemeit. Az egy osztályba eső elemeken belül ez Next Fit (NF) szabály szerinti pakolást jelent. Ez konkrétan azt jelenti, hogy ha az érkező elem mérete $x \in I_j$ és az utoljára megnyitott \mathcal{B}_j -beli B ládára $\text{szint}(B) + x \leq 1$, akkor x -et elpakoljuk B -be. Különben nyitunk egy új \mathcal{B}_j osztálybeli ládát, és x -et ebben a ládában helyezzük el. Fontos, hogy a fenti, HF eljárásnál alkalmazott szabálytól annyiban térünk el, hogy az új láda megnyitásakor nem zárunk be ládát az adott osztályban, tehát azok tartalma később is hozzáférhető lesz. Az algoritmusunk alapvetően ugyan egy Harmonikus Fit típusú szabályt alkalmaz, de osztópontjaink a $[0, 1]$ intervallum egy ekvidisztáns (uniform) beosztásából származnak.

A HF szabály alkalmazásával minden olyan ládát, amely a \mathcal{B}_i , $i \leq 3k$, ládaosztályokba esik – legfeljebb az osztályok utoljára megnyitott ládáitól eltekintve – egészen biztos, hogy legalább $2/3$ szintig telepakolunk. Így, ha a lista nem tartalmaz más intervallumból elemeket, akkor a célként kitűzött $3/2$ -es aszimptotikus versenyképességet már el is érünk. Mivel azonban a $\mathcal{B}_{3k+1}, \dots, \mathcal{B}_{4k}$ osztályba tartozó ládákba a HF szabály egyetlen nagy elemet helyez, ezért ezekre a ládákra finomítanunk kell az algoritmust: ha a lista elemeinek méretei ezt lehetővé teszik, akkor gondoskodnunk kell arról, hogy ezek is fel legyenek töltve a megfelelő szintig. Két esetben térünk el a HF szabálytól.

2.1. Algoritmus. UF-k algoritmus

while van még elem az L listában **do input** a következő x ;

if $x \in I_l$, $3k \leq l \leq 6k$ **then**

$x_{NF} \rightarrow \mathcal{B}_l$;

if $x \notin I_{6k}$ **and** $x \notin I_{3k}$ **then**

call Átpakolás(j , $6k - j$);

endif ;

endif ;

else if $x \in I_j$, hogy $1 \leq j \leq 3k - 1$ **then**

call Feltöltés(x);

endelse ;

endwhile ;

- **1. Szabály (Feltöltés):** Ha egy olyan $x \in I_j$ kis elem érkezik, amelyre $1 \leq j \leq 3k - 1$ teljesül, akkor megvizsgáljuk \mathcal{B}_j komplementens osztályait indexeik szerint növekvő sorrendben oly módon, hogy az első nem üres \mathcal{B}_l osztály esetében annak utoljára megnyitott B ládája elhelyezzük x -et. Legyen ez a láda B . Az világos, hogy x elpakolása előtt $\text{szint}(B) \in I_l$. Ha az elpakolás után $\text{szint}(B) + x \notin I_l$, akkor B -t átsoroljuk abba a \mathcal{B}_t ládaosztályba, amelyre $\text{szint}(B) + x \in I_t$.

Ha a komplementensek mindegyike üres, akkor a kis elem elhelyezésére az NF szabályt használjuk.

2.1. Eljárás. Procedure Feltöltés(x)

$j := \lceil 6k \cdot x \rceil$; **comment:** x az aktuálisan elpakolandó elem mérete, j annak az osztálynak az indexe, melyre $x \in I_j$;

$l^* = \min\{4k, 6k - j\}$; (\mathcal{B}_j legnagyobb indexű komplementense \mathcal{B}_{l^*})

do $l = 3k + 1$ **to** l^*

if $\mathcal{B}_l \neq \emptyset$ **then**

$x \rightarrow \mathcal{B}_l$;

if $\text{szint}(B) \in I_p$, $p \neq l$ **then**

$B \rightarrow \mathcal{B}_p$;

if $p < 6k$ **then**

call Átpakolás($p, 6k - p$);

endif ;

endif ;

return ; (nincs osztályváltás vagy Átpakolásból tértünk vissza)

endif ;

enddo ;

$x \rightarrow_{NF} \mathcal{B}_j$ osztály ládája; (nem talált komplementst)

- **2. Szabály (Átpakolás):** Ha egy olyan nagy elem érkezik, amelyre $x \in I_l$, ahol $3k + 1 \leq l \leq 4k$ teljesül, akkor az elem elpakolásához először nyitunk egy \mathcal{B}_l osztálybeli nagy ládát, és abban elpakoljuk x -et. Ezután indexeik szerint csökkenő sorrendben megvizsgáljuk, hogy van-e olyan \mathcal{B}_j -beli láda, amely nem üres, ahol $\mathcal{B}_j \in C(\mathcal{B}_l)$. Ha találunk ilyen ládát, akkor ebből a ládából egy elemet áthelyezünk a nagy ládába. Amennyiben a nagy láda szintje az elpakolás után intervallumot vált, akkor a Feltöltési szabályban leírtakhoz hasonlóan járunk el. Figyelnünk kell arra, hogy ebben az esetben az a láda, amely a kis elemet tartalmazta, kiürülhet.

2.2. Eljárás. Procedure Átpakolás(l, j)

comment: Megpróbálunk átpakolni egy kis elemet egy $C(\mathcal{B}_l)$ osztálybeli ládából \mathcal{B}_l utolsó ládája ($l \geq 3k + 1$). j adja meg azt, hogy a $C(\mathcal{B}_l)$ melyik elemétől kell kezdeni a keresést.


```

do  $t = j$  to 1
  if  $B_t \neq \emptyset$  then
     $x \in B \in B_t \rightarrow B_t$ 
    if  $\text{szint}(B) \in I_s, l+1 \leq s \leq 6k$  then
       $B \rightarrow B_s$ ;
      if  $s < 6k$  then
        call Átpakolás( $p, s$ );
      endif;
    endif;
  endif;
enddo;

```

Az algoritmus és a két fenti szabály pontos leírását a táblázatokban található pszeudokódok tartalmazzák. A leírás során az $x_{NF} \rightarrow B_t$, illetve $x \rightarrow B_t$ jelölést használjuk akkor, ha az aktuális tárgyat a Next Fit szabállyal pakoljuk el a B_t ládaosztályba, illetve ha berakjuk a B_t ládaosztály utolsóládájába. Hasonlóan, a $B \rightarrow B_t$ jelölést használjuk annak rövidítésére, hogy a B ládát átsoroljuk a B_t ládaosztályba.

A következő három állítás az algoritmus bonyolultságának vizsgálatához nyújt segítséget.

2.1. LEMMA. Az UF-k algoritmus véges.

Bizonyítás. A főprogram pontosan n -szer fut le és a Feltöltés eljárás listaelemenként legfeljebb egyszer hajtódik végre.

A főprogramból vagy a Feltöltés eljárásból hívott Átpakolás eljárás ugyan rekurzívan meghívhatja önmagát, de a rekurzív hívás csak akkor következik be, ha az aktuálisan használt láda szintje intervallumot vált. Ennek következménye, hogy egy Átpakolás eljárásban a ládamagasság intervallumát jelző (első) paramétere, l , a rekurzióban egymást követő Átpakolás eljárások során szigorúan monoton nő. A rekurziót indító Átpakolás eljárásban $l \geq 3k + 1$, az utolsónak hívottban legfeljebb $4k$. Ezért a rekurzív hívások száma listaelemenként legfeljebb $k - 1$, ami adja, hogy az Átpakolás eljárás legfeljebb k -szor hívódik meg listaelemenként.

Mivel az Átpakolás eljárás listaelemenként csak a főprogram és a Feltöltés eljárások legfeljebb egyikéből hívódik meg, így állításunk bizonyított. \square

2.1. KÖVETKEZMÉNY. Ha k egy rögzített, pozitív egész szám, akkor az UF-k algoritmus legfeljebb k elemet pakol át lépésenként.

2.2. LEMMA. Az UF-k algoritmus futása során ládaosztályok tartalmának vizsgálata ($B_i \neq \emptyset$ összehasonlítás) összesen legfeljebb $3kn$ -szer történik meg.

Bizonyítás. Azt fogjuk belátni, hogy listaelemenként legfeljebb $3k$ -szor történik meg az állításban említett összehasonlítás.

A főprogramban nincs, a Feltöltés eljárásban egy listaelem elhelyezésekor legfeljebb k -szor történhet ilyen vizsgálat.

A főprogramból vagy a Feltöltés eljárásból hívott Átpakolás eljárás első paramétere, l , második paramétere $6k - l$. $l = 3k + i$ alakú, ahol $1 \leq i \leq k$. A $6k - l$ -nél nem nagyobb indexű ládaosztályok száma $2k + 1 - i$. Az Átpakolás eljárások egymást követő rekurzív hívásai során a második paraméterek alkotta sorozat – nem szigorú értelemben ugyan, de – monoton csökkenő sorozatot alkot. Mivel egy adott listelem elhelyezésekor az Átpakolás eljárás legfeljebb $k + 1 - i$ -szer hívódik (beleértve a rekurzív hívásokat is), így – multiplicitásokkal számolva – ezekben összesen legfeljebb $(2k + 1 - i) + (k + 1 - i) = 3k + 2 - 2i$ kérdéses vizsgálat történik.

Ha az adott listaelemnél az első Átpakolás eljáráshívás Feltöltés eljárásból történt, akkor $i \geq 2$ (hiszen ott a nagy láda ekkor osztályt is kellett, hogy váltson), és a Feltöltés eljárásban legfeljebb $i - 1$ darab ilyen vizsgálat volt, összesen tehát legfeljebb $3k - 1$.

Ha az Átpakolás a főprogramból hívódott, akkor a főprogramban egyetlen kérdéses összehasonlítás sem történt, ebben az esetben $i \geq 1$, így a kérdéses vizsgálatok száma összesen legfeljebb $3k$. \square

A három állítás következményeként kimondható az alábbi tétel:

2.1. TÉTEL. *Az UF-k algoritmus időbonyolultsága mind az input elemek mind az átpakolható elemek számában lineáris, pontosan $T(\text{UF-}k) = O(kn)$.*

3. Az UF-k algoritmus aszimptotikus versenyképessége

Az UF-k algoritmus AVK-jának vizsgálatakor két esetet különböztetünk meg attól függően, hogy az algoritmusnak egy konkrét L listainputon való lefuttatása után

- **A.:** a $\mathcal{B}_{3k+1}, \dots, \mathcal{B}_{4k}$ ládaosztályok mindegyike üres,
- **B.:** a $\mathcal{B}_{3k+1}, \dots, \mathcal{B}_{4k}$ ládaosztályok valamelyike nem üres.

Az **A.** esetre a következő állítás mondható ki:

3.1. LEMMA. *Ha egy L listainputon az UF-k algoritmus leállásakor a \mathcal{B}_{3k+i} , $i \in \{1, \dots, k\}$ ládaosztályok mindegyike üres, akkor $\text{UF-}k(L) \leq \frac{3}{2}\text{OPT}(L) + (2k + 1)$.*

Bizonyítás. Ebben az esetben minden láda legalább $\frac{2}{3}$ szintig tele van, a csak *kis* elemeket tartalmazó ládaosztályok ($\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{3k}$) legfeljebb $1 - 1$ ládájától eltekintve. Az ilyen ládaosztályok száma pedig maximum $2k + 1$. Ebből a tétel állítása azonnal következik. \square

A **B.** eset vizsgálatához az irodalomból jól ismert eszközt, az úgynevezett súlyfüggvény-technikát alkalmazzuk (lásd pl. [3]). A súlyfüggvény definiálásakor az algoritmus AVK-jának elemzésében a következő állítás fontos szerepet fog játszani.

3.2. LEMMA. *Ha az UF-k algoritmus egy L inputon való lefutása után a \mathcal{B}_{3k+i} , $i \in \{1, \dots, k\}$ legalább egyike nem üres, és i^* a minimális ilyen tulajdonságú index, akkor a \mathcal{B}_{3k+i^*} összes komplement osztálya, kivéve \mathcal{B}_1 -et, üres.*

Bizonyítás. A bizonyítás indirekt módon történhet. Tegyük föl, hogy algoritmusunk elpakolta az adott listát, \mathcal{B}_{3k+i^*} -nak valamely komplement osztálya nem üres, és az nem a \mathcal{B}_1 osztály. Legyen x a legnagyobb indexű ilyen komplement osztály utolsó ládájának legfelső eleme. Mivel \mathcal{B}_{3k+i^*} nem üres, így tartalmaz legalább egy nemüres ládát. Legyen ez B .

Két eset lehetséges. Vagy az x érkezett hamarabb, mint ahogy B -be utoljára elemet pakoltunk, vagy fordítva. Legyen y a B legfelső eleme, azaz az utoljára B -be helyezett elem. (Azaz az x kis elem vagy a B ezen formájának kialakulása, B tartalmának utolsó változásának időpillanata előtt érkezett, vagy fordítva).

- Az első esetben az algoritmus rápakolta volna a kis x elemet egy nagy ládára, hiszen akkor volt legalább egy, a feltételeknek megfelelő láda.
- A második esetben a szóban forgó nagy, \mathcal{B}_{3k+i^*} -beli ládába bepakolásra került volna még elem y bepakolása után, hiszen volt akkor legalább egy átpakolható „kis elem”.

Mindkét eset ellentmondáshoz vezet. □

Legyen i^* a 3.2. Lemmabeli, és legyen $j^* = \max\{i^*, 2\}$. A B. esetben használt súlyfüggvény pontos definíciója a következő:

$$w(x) := \begin{cases} \frac{6k}{6k-1}x, & x \in \{I_1 \cup \dots \cup I_{j^*-1}\} \\ \frac{j^*-1}{6k-1}, & x \in \{I_{j^*} \cup \dots \cup I_{3k-i^*}\}, \\ \frac{1}{2}, & x \in \{I_{3k-i^*+1} \cup \dots \cup I_{3k}\}, \\ 1 - \frac{6k}{6k-1} \left(\frac{3k+i^*-1}{6k} - x \right), & x \in \{I_{3k+1} \cup \dots \cup I_{3k+i^*-1}\} (= \emptyset, \text{ ha } i^* = 1), \\ 1, & x \in \{I_{3k+i^*} \cup \dots \cup I_{6k}\}. \end{cases}$$

Mielőtt megadjuk az UF-k algoritmus aszimptotikus versenyképességét, kimondunk néhány további lemmát.

3.3. LEMMA. *Ha az algoritmus lefutása után létezik legalább egy olyan i index, $i \in \{1, \dots, k\}$, hogy a \mathcal{B}_{3k+i} osztály tartalmaz legalább egy nemüres ládát, és $3k + i^*$ a legkisebb ilyen index, akkor létezik egy olyan $0 \leq M_2 < \infty$ konstans, hogy bármely L listára $w(L) = \sum_{x \in L} w(x) \geq \text{UF-k}(L) - M_2$.*

Bizonyítás. Azt fogjuk belátni, hogy – ládaosztályonként legfeljebb egy-egy ládától eltekintve – minden ládában az elemek súlya legalább 1. (Egy láda súlyán a benne elhelyezett elemek súlyainak összegét értjük.)

- A \mathcal{B}_1 osztály ládái, legfeljebb 1 kivételtől eltekintve legalább $\frac{6k-1}{6k}$ szintig tele vannak. Itt minden elem súlya (saját) méretének $\frac{6k}{6k-1}$ -szerese, így a legfeljebb egy ládától eltekintve minden láda súlya legalább 1.
- A $\mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_{2k}$ osztályok mind üresek.
- A $\mathcal{B}_{2k+1}, \dots, \mathcal{B}_{3k}$ osztályok közül amelyek nem üresek, azok ládái – osztályonként legfeljebb 1 – 1 kivételtől eltekintve – pontosan két elemet tartalmaznak, mindkettő súlya $\frac{1}{2}$.
- A $\mathcal{B}_{3k+1}, \dots, \mathcal{B}_{3k+i^*-1}$ osztályok üresek.
- A $\mathcal{B}_{3k+i^*}, \dots, \mathcal{B}_{4k}$ és a \mathcal{B}_{6k} osztályok ládái – kivétel nélkül – pontosan egy „nagy elemet” tartalmaznak. Legyen B egy ilyen láda, és legyen x a benne lévő nagy elem. Két esetet különböztetünk meg. Ha $x > \frac{3k+i^*-1}{6k}$, akkor ennek súlya önmagában 1, így $w(B) \geq 1$. Ha $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3k+i^*-1}{6k}\right]$, akkor mivel $\text{szint}(B) > \frac{3k+i^*-1}{6k}$, így a láda tartalmaz legalább $\frac{3k+i^*-1}{6k} - x$ összmenyiségű kis elemet, amelyek összsúlya legalább $\frac{6k}{6k-1} \left(\frac{3k+i^*-1}{6k} - x\right)$, így $w(B) \geq 1$ ekkor is. Azaz, mindkét esetben, minden láda összsúlya legalább 1.

Figyelembe véve, hogy a kivétel ládák száma az összes – nem üres – ládaosztályban legfeljebb $k+1$, így az $M_2 = k+1$ konstanssal a lemma állítása teljesül. \square

3.4. LEMMA. *Ha az algoritmus lefutása után létezik legalább egy olyan i index, $i \in \{1, \dots, k\}$, hogy a \mathcal{B}_{3k+i} osztály tartalmaz legalább egy, nemüres ládát, és S az L elemeinek egy olyan részhalmaza, melyre $\sum_{x \in S} x \leq 1$, akkor*

$$w(S) := \sum_{x \in S} w(x) \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{6k-1}$$

teljesül.

Bizonyítás. A kulcs ennek a résznek a bizonyításához (is) a 3.2. Lemma. Ha az S halmazban nincs elem az $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ intervallumból, akkor a súlyfüggvény definíciójából látható, hogy minden S -beli x elem súlya $\leq \frac{3}{2}x$. Ebből következően

$$w(S) := \sum_{x \in S} w(x) \leq \sum_{x \in S} \frac{3}{2}x = \frac{3}{2} \sum_{x \in S} x \leq \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

Ha az S halmaz tartalmaz elemet az $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ intervallumból, akkor pontosan egy elemet tartalmaz onnan, és ez a legnagyobb méretű elem a ládában. Jelöljük ezt x_1 -gyel. Feltételünk szerint ekkor létezik olyan i pozitív egész, hogy $x_1 \in I_{3k+i}$. Két esetet különböztetünk meg, x_1 mérete alapján.

1. Az első eset, amikor $x_1 > \frac{3k+i^*-1}{6k}$, azaz $i \geq i^*$. Az S -beli második legnagyobb elem, x_2 mérete alapján két lehetőségünk van.

a) Az első lehetőség, hogy x_2 nem eleme az I_j , $j \in \{3k - i + 1, \dots, 3k\}$ intervallumok egyikének sem, azaz a maradék az x_1 -től különböző S -beli elemek az I_j , $j \in \{1, \dots, 3k - i\}$ intervallumba esnek. Az ilyen kis x elemek súlya legfeljebb $\frac{6k}{6k-1}x$, így

$$w(S) = w(x_1) + \sum_{x \in S, x \neq x_1} w(x) \leq 1 + \frac{6k}{6k-1} \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{3k}{6k-1} < \frac{3}{2} + \frac{1}{6k-1}.$$

b) A második lehetőség, hogy x_2 az I_j , $j \in \{3k - i + 1, 3k\}$ intervallumok valamelyikébe esik. Ez az intervallum azonban kizárólag az I_{3k-i+1} intervallum lehet, mert bármely más intervallumbeli elemhez hozzáadva x_1 -et 1-nél nagyobb értéket kapnánk. Viszont ekkor S x_1 -en és x_2 -n kívüli elemeinek összmérete legfeljebb $1 - x_1 - x_2 \leq 1 - \frac{3k+i-1}{6k} - \frac{3k-i}{6k} = \frac{1}{6k}$ lehet. (Ez azt is jelenti, hogy ekkor az S halmaz x_1 -en és x_2 -n kívül legfeljebb csak az I_1 intervallum elemeit tartalmazhatja.) Így

$$\begin{aligned} w(S) &= \sum_{x \in S} w(x) = w(x_1) + w(x_2) + \sum_{x \in S, x \neq x_1, x \neq x_2} w(x) \leq \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{6k}{6k-1} \cdot \frac{1}{6k} = \frac{3}{2} + \frac{1}{6k-1}. \end{aligned}$$

2. A második eset, amikor $x_1 \leq \frac{3k+i^*-1}{6k}$, azaz $x \in I_{3k+i}$, $i < i^*$. Az S -beli második legnagyobb elem, x_2 mérete alapján szintén két lehetőségünk van.

a) Ha $x_2 > \frac{3k-i^*}{6k}$, akkor $w(x_2) = \frac{1}{2}$, és S -ben az összes többi (x_1 -től és x_2 -től különböző) x elem összmérete $1 - x_1 - x_2 < 1 - \frac{3k+i-1}{6k} - \frac{3k-i^*}{6k} = \frac{i^*-i+1}{6k}$. Így

$$\begin{aligned} w(S) &= \sum_{x \in S} w(x) = w(x_1) + w(x_2) + \sum_{x \in S, x \neq x_1, x \neq x_2} w(x) \leq \\ &\leq 1 - \frac{6k}{6k-1} \cdot \left(\frac{3k+i^*-1}{6k} - x_1 \right) + \frac{1}{2} + \frac{6k}{6k-1} \cdot \frac{i^*-i+1}{6k}. \end{aligned}$$

Mivel $x_1 \leq \frac{3k+i-1}{6k}$, így ennek a kifejezésnek az értéke

$$\begin{aligned} &\leq \frac{3}{2} - \frac{3k+i^*-1-(3k+i-1)}{6k-1} + \frac{i^*-i+1}{6k-1} \leq \\ &\leq \frac{3}{2} - \frac{i^*-i}{6k-1} + \frac{i^*-i+1}{6k-1} = \frac{3}{2} + \frac{1}{6k-1}. \end{aligned}$$

b) Az utolsó lehetőség, hogy $x_1 \leq \frac{3k+i^*-1}{6k}$, de $x_2 < \frac{3k-i^*}{6k}$. Ekkor x_2 -t is beleértve S bármelyik, x_1 -től különböző x elemére $w(x) \leq \frac{6k}{6k-1}x$ teljesül. Így az előző eset első ágához hasonló módon $w(S) < \frac{3}{2} + \frac{1}{6k-1}$.

□

A 3.1., 3.3. és 3.4. Lemmákból következik az alábbi

3.1. TÉTEL. *Bármely pozitív, de rögzített $k \geq 1$ egész esetén*

$$R(UF-k) \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{6k-1}.$$

Bizonyítás. A 3.1. Lemmával beláttuk, hogy az A. esetbeli minden L listára létezik olyan M_1 konstans, hogy

$$UF-k(L) \leq \frac{3}{2} OPT(L) + M_1.$$

A B. esetben minden L listára a 3.4. Lemma miatt a lista $w(L)$ súlyára, amely a benne elhelyezett elemek súlyainak összegeként definiált, a következő teljesül:

$$w(L) = \sum_{B \in OPT(L)} \sum_{x \in B} w(x) = \sum_{B \in OPT(L)} w(B) \leq \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6k-1} \right) OPT(L).$$

Ugyanakkor a 3.3. Lemmából adódik, hogy az ilyen L listákra létezik olyan M_2 konstans, hogy

$$UF-k(L) \leq w(L) + M_2,$$

amiből adódik, hogy

$$UF-k(L) \leq \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6k-1} \right) OPT(L) + M_2.$$

Az $M := \max\{M_1, M_2\}$ választással adódik, hogy bármely L listára

$$UF-k(L) \leq \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6k-1} \right) OPT(L) + M.$$

□

A most következő lemma azt igazolja, hogy az algoritmusunkra bizonyított felső korlát éles.

3.5. LEMMA. *Bármely pozitív, de rögzített $k \geq 1$ egész esetén*

$$R(UF-k) \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{6k-1}.$$

Bizonyítás. Minden $t \in N^+$ -ra konstruálunk egy $N = (4 + \frac{1}{6k-1})n$ elemszámú L listát, ahol $n = 2t(6k-1)$.

Álljon L négy (rész)lista konkatenációjából, azaz legyen $L = L_1 L_2 L_3 L_4$, ahol L_1 : $2t$ -szer L_1^* , ahol L_1^* : $6k-1$ darab $\frac{1}{6k} - 2\varepsilon$ után 1 darab $(12k+1)\varepsilon$ méretű elem, ahol ε tetszőleges pozitív érték, melyre $\varepsilon < \min \left\{ \frac{b}{12k+1}, \frac{b}{n+3}, \frac{1}{2t(12k+1)+n} \right\}$ teljesül, L_2 : n darab ε méretű elem,

L_3 : n darab $\frac{3k-1}{6k} + \varepsilon$ méretű elem,

L_4 : n darab $\frac{1}{2} + \varepsilon$ méretű elem.

Az UF-k algoritmus úgy működik ezen az inputon, hogy L_1^* elemeit (NF szabály szerint) egy-egy \mathcal{B}_1 -beli ládába pakolja. Ezek magassága pontosan $1 - \frac{1}{6k} + 3\varepsilon$, így a következő L_1^* első eleme már nem fér rájuk. Ezért L_1 elemeinek elpakolásához (NF szabály szerint) az algoritmus $2t = \frac{n}{6k-1}$ darab ládát használ fel. Ezután L_2 elemeit – mivel azok is \mathcal{B}_1 -ből valók és ε méretük definíciója miatt beférnek az utolsó, L_1 érkezésekor létrehozott ládába – bepakolja ebbe – az NF szabály szerint –, majd az algoritmus L_3 elemeit elpakolja az NF szabállyal \mathcal{B}_{3k} -ba, $n/2$ darab ládát felhasználva. L_4 minden elemének érkezésekor az algoritmus nyit egy új ládát \mathcal{B}_{3k+1} -ben, belepakolja az elemet, majd átpakol egy L_2 -beli ε méretű elemet ebbe a ládába. Így ez újabb n darab ládát jelent.

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy bármely rögzített k -ra az UF-k algoritmusunk $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{6k-1}$ ládát használ, és hogy $OPT(L) \leq n + 1$. Mivel ez tetszőleges t pozitív egészre teljesül, így ezzel állításunkat bizonyítottuk. \square

A 3.1. Tétel és a 3.5. Lemma együttesen szolgáltatja a következő eredményt:

3.2. TÉTEL. *Bármely pozitív, de rögzített $k \geq 1$ egész esetén*

$$R(UF-k) = \frac{3}{2} + \frac{1}{6k-1}.$$

4. Összefoglalás

A 3.2. Tétel állítását megvizsgálva az UF-k algoritmusra vonatkozóan azt látjuk, hogy ha k tart a végtelenbe, akkor az algoritmus(ok) aszimptotikus versenyképessége, $R(UF-k)$ tart 1,5-hez. Két konkrét esetet érdemes kiemelni: a $k = 3$ esetben az UF-3 algoritmus aszimptotikus versenyképessége 1,5588..., ami alatta van a legjobb ismert on-line algoritmusra bizonyított 1,58889 aszimptotikus versenyképességnek. A $k = 3$ eset másik érdekessége, hogy annak AVK-ja alatta van az úgynevezett Harmonikus Fit típusú on-line ládapakolási algoritmusokra bizonyított 1,583...-as alsó korlátnak [11]. A $k = 5$ esetben az UF-5 algoritmus AVK-ja 1,53448..., amely jobb van Vliet 1,5401-es on-line algoritmusokra vonatkozó alsó korlátjánál [13].

Számos nyitott kérdés felvethető, ezekből hármat említünk meg. Az első, hogy adjunk lépésenként 3-nál kevesebb elem átpakolását megengedő, 1,583...-nál kisebb AVK-jú szemi-on-line ládapakolási algoritmust! A második, hogy adjunk lépésenként 5-nél kevesebb elem átpakolását megengedő, 1,5401-nél kisebb AVK-jú algoritmust! Továbbá, a harmadik nyitott probléma kis k értékekre (pl. $k = 1, 2$) alsó korlát adása.

Köszönetnyilvánítás. A kutatást az OTKA (T 048377 és T 046822 számú projektek), valamint a MÖB-DAAD Magyar-Német Kutatócsere Program (21-es számú projekt) támogatta.

Hivatkozások

- [1] E. G. COFFMAN – G. GALAMBOS – S. MARTELLO – D. VIGO: *Bin Packing Approximation Algorithms: Combinatorial Analysis*. In Handbook of Combinatorial Optimization (Eds. D.-Z. Du and P.M. Pardalos), pages 151-208. Kluwer Academic Publishers, (1999)
- [2] G. GALAMBOS: *A new heuristic for the classical bin packing problem*. Technical Report 82, Institute fuer Mathematik, Augsburg, (1985)
- [3] G. GALAMBOS – G. J. WOEGINGER: *Repacking helps in bounded space on-line bin packing*. Computing, 49: 329-338, (1993)
- [4] G. GAMBOSI – A. POSTIGLIONE – M. TALAMO: *Algorithms for the Relaxed Online Bin-Packing Model*. SIAM J. Computing, 30(5): 1532-1551, (2000)
- [5] M. R. GAREY – D. S. JOHNSON: *Computers and Intractability (A Guide to the theory of NP-Completeness)*. W. H. Freeman and Company, San Francisco, (1979)
- [6] E. F. GROVE: *Online bin packing with lookahead*. SODA, 430-436, (1995)
- [7] G. GUTIN – T. JENSEN – A. YEO: *Batched Bin Packing*. Discrete Optimization, 2(1): 71-82, (2005)
- [8] Z. IVKOVIĆ – E. L. LLOYD: *A fundamental restriction on fully dynamic maintenance of bin packing*. Information Processing Letters, 59(4): 229-232, (1996)
- [9] Z. IVKOVIĆ – E. L. LLOYD: *Fully Dynamic Algorithms for Bin Packing: Being (Mostly) Myopic Helps*. SIAM J. Computing, 28(2): 574-611, (1998)
- [10] C. C. LEE – D. T. LEE: *A Simple On-line Bin Packing Algorithm*. J. of ACM, 32: 562-572, (1985)
- [11] P. RAMANAN – D. J. BROWN – C. C. LEE – D. T. LEE: *On-line bin packing in linear time*. Journal of Algorithms, 10(3): 305-326, (1989)
- [12] S. S. SEIDEN: *On the online bin packing problem*. Journal of the ACM, 49(5): 640-671, (2002)
- [13] A. VAN VLIET: *An improved lower bound for online bin packing algorithms*. Information Processing Letters, 43(5): 277-284, (1992)

(Beérkezett: 2005. szeptember 29.)

BALOGH JÁNOS, GALAMBOS GÁBOR
 SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM,
 JUHÁSZ GYULA PEDAGÓGUSKÉPZŐ KAR,
 SZÁMÍTÁSTECHNIKA TANSZÉK,
 6701 SZEGED, Pf. 396.
 {balogh,galambos}@jgypk.u-szeged.hu

ALGORITHMS FOR THE ON-LINE BIN PACKING PROBLEM WITH REPACKING

JÁNOS BALOGH AND GÁBOR GALAMBOS

In the paper we deal with a semi-on-line bin packing problem. In this modification of the classical on-line bin packing problem some operations are allowed on the earlier packed elements while the algorithm packs the actual element in an on-line manner. We define an algorithm for every positive k value, which repacks at most k elements per step. We prove that the asymptotic competitive ratio of our algorithms is $\frac{3}{2} + \frac{1}{6k-1}$.

EGY KÉSLELTETETT DIFFERENCIÁLEGYENLET VIZSGÁLATA MEGBÍZHATÓ SZÁMÍTÓGÉPES ELJÁRÁSSAL

BÁNHELYI BALÁZS

A szakirodalomban nem volt ismert megbízható numerikus eljárás késleltetett differenciálegyenletek megoldására. Egy megbízható algoritmusként nem csak a számításokban kell garantálnak lennie, de a formulákat is korrektül kell használnia. Jelen cikkben egy – sok szempontból is egyszerű – differenciálegyenleten keresztül próbáljuk illusztrálni az eljárás részleteit. A módszerünk alapja a kezdeti érték problémákra sokszor alkalmazott Taylor-sor. Ezzel az eljárással a függvény trajektóriája meghatározására egy megbízható befoglalást kapunk. A befoglaló intervallum ismeretében egy könnyen eldönthető feladat eredményét adjuk meg.

1. Bevezetés

Késleltetett differenciálegyenletekre nem ismert matematikai bizonyításokban is használható numerikus eljárás. Több gyakorlati probléma van, amelynek modellje visszavezethető ilyen késleltetett egyenletekre. A késleltetés természetes, ha arra gondolunk, hogy például az információ terjedése időbe telik, és így minden olyan döntés, válasz, vagy reakció – mely ezen információn alapul – késést indukál. Gondoljunk csak a biológiában a populációelméletre, orvostudományban a fertőzések terjedésére, vagy a közgazdaságtanban a részvények árfolyamának változására. Ezen témakörök tanulmányozása során felmerülhet bennünk az a kérdés, hogy a vizsgált paraméter által okozott ingadozó viselkedés állandósult, vagy csak a rövid vizsgálati idő miatt látjuk annak.

A jelen cikkben egy korábban felvetett [14] egyszerűnek tűnő problémát fogunk megvizsgálni. A feladatunk azt eldönteni, hogy egy, a differenciálegyenletek jobb oldalán szereplő paraméter függvényében hogyan viselkedik a differenciálegyenlet megoldása, trajektóriája. Hasonló jobboldalú, de szimmetrikus esetekre már léteznek eredmények [11]. Szimmetrikus abban az értelemben, hogy a differenciálegyenlet jobb oldalán szereplő – a megoldás függvényében megadott – függvény középpontosan szimmetrikus. A nemszimmetrikus esetekkel kapcsolatban vannak még bizonyítandó feltételezések.

E cikkben egy számítógépes vizsgálatot fogunk bemutatni. A programról megmutatjuk, hogy az matematikailag korrekt számításokat végez, és így egy számítógéppel segített matematikai bizonyítást fogunk adni a feltett kérdésre. Természetesen a teljes korrektség eléréséhez a formulákat is a megfelelő módon kell használni. Az eredményekből látni fogjuk, hogy a módszer működik, de az állítás teljes értékű bizonyításához a jelenlegi számítási kapacitások nem elegendőek.

2. A vizsgált késleltetett differenciálegyenlet

Tekintsük az alábbi késleltetett differenciálegyenletet:

$$z'(t) = -\alpha z(t-1)(1+z(t)),$$

ahol $\alpha \in \mathbb{R}^+$ paraméter. A megfelelő átalakításokkal csak késleltetést tartalmazó alakra hozható. Ha $z(t) \geq -1$ (számunkra csak ez az eset érdekes), akkor vegyük a $z(t) = e^{y(t)} - 1$ helyettesítést. Ekkor $z'(t) = e^{y(t)}y'(t)$ és $z(t-1) = e^{y(t-1)} - 1$. Így az alábbi egyenletet kapjuk:

$$e^{y(t)}y'(t) = -\alpha \left(e^{y(t-1)} - 1 \right) \left(1 + e^{y(t)} - 1 \right),$$

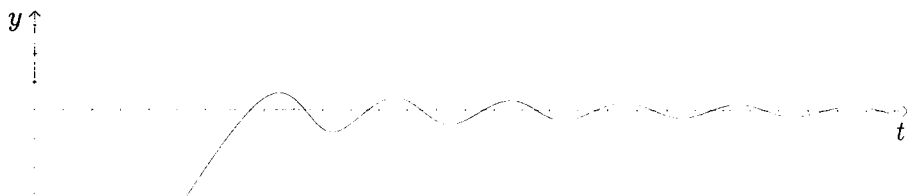
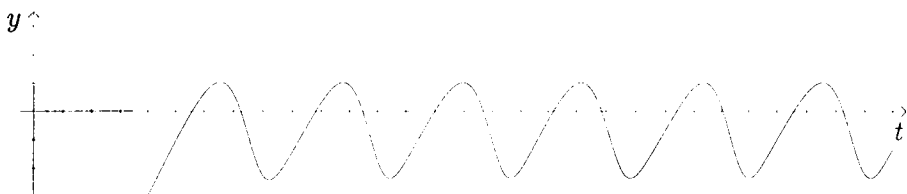
melyből egyszerűsítés után:

$$y'(t) = -\alpha \left(e^{y(t-1)} - 1 \right). \quad (1)$$

Az indulófüggvény legyen $\phi(s)$, ahol $s \in [-1, 0]$. Vizsgálatainkat a $\phi(s) \equiv -11$ indulófüggvényre korlátozzuk.

Az $\alpha \leq 1,5$ esetben ismert, hogy a trajektória oszcillálva konvergál a nullához (lásd az 1(a). ábrát). A $\pi/2$ -ben bifurkáció lép fel, és megjelennek a periodikus pályák. Az $\alpha > \pi/2$ esetén azonban már ezen periodikus pályák valamelyikéhez tart a megoldás. Ezért a továbbiakban csak az $\alpha \in [1, 5, \pi/2]$ eseteket vizsgáljuk. Az eddigi numerikus eredmények alapján az sejthető, hogy itt is hasonlóan viselkedik mint az $\alpha \leq 1,5$ esetben.

A nullához való konvergencia vizsgálata numerikus módszerekkel nehézkes, így egy egyszerűsített problémát tanulmányozunk. A feladatunk az, hogy a késleltetett differenciálegyenlet megoldásairól eldöntsük, hogy létezik-e olyan $a \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy az $[a, a+1]$ intervallumon a megoldás abszolút értéke kisebb, mint egy adott konstans. Ez az érték a mi esetünkben legyen $0,075$. A probléma így egyszerűbbé vált, mivel a nullához való konvergenciából következik a fenti tulajdonság. Ez a kettő nem ekvivalens állítás, mivel a fordított irány nem szükségszerűen igaz. A trajektória tarthat egy olyan periodikus megoldáshoz, melynek szélsőértékei a $\pm 0,075$ között vannak, és nem nullák (lásd az 1(b). ábrát az $\alpha = 2,0$ esetre).


 (a) Az $\alpha = 1,5$ eset.

 (b) Az $\alpha = 2,0$ eset.

1. ábra. Közelítő ábrák a trajektóriára.

3. A differenciálegyenlet mélyebb vizsgálata

Több módszer is ismert a differenciálegyenletek megoldásainak közelítésére. A hagyományos differenciálegyenletekre kifejlesztett matematikai bizonyításokban is használható [7] módszerek egy jó része a Taylor-soron alapul [4, 13]. Így mi is ezen az elven működő eljárást alkalmazunk a jelenlegi késleltetett differenciálegyenletre.

Lagrange-féle maradéktaggal ellátott Taylor-polinom:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k y^{(k)}(x_0)}{k!} + r_n, \quad (2)$$

ahol

$$r_n = \frac{(x-x_0)^n}{n!} y^{(n)}(x^*), \quad (3)$$

valamely $x^* \in [x_0, x]$ -re ($x_0 \leq x$).

Ha elhagyjuk az r_n maradéktagot a képletből, akkor egy közelítést kapunk $y(x)$ -re. A kapott formulát megvizsgálva látható, hogy a magasabbrendű deriváltak alkalmazása esetén jobban közelíthető a függvény. A következő állítás segítségével határozhatjuk meg a magasabbrendű deriváltakat.

3.1. ÁLLÍTÁS. Az (1)-es késleltetett differenciálegyenlet magasabbrendű deriváltjai ($k \geq 2$) felírhatók a következő formulával:

$$y^{(k)}(t) = -\alpha y^{(k-1)}(t-1) + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-2}{i-1} y^{(i)}(t-1) y^{(k-i)}(t). \quad (4)$$

Bizonyítás. A bizonyítást k szerinti teljes indukcióval végezzük.

Tekintsük először a $k = 2$ esetet:

$$\begin{aligned}
 y^{(2)}(t) &= \left(-\alpha \left(e^{y(t-1)} - 1 \right) \right)' = -\alpha e^{y(t-1)} y'(t-1) = \\
 &= y'(t-1) \left(-\alpha \left(e^{y(t-1)} - 1 \right) \right) - \alpha y'(t-1) = \\
 &= y'(t-1) y'(t) - \alpha y'(t-1) = \\
 &= -\alpha y^{(1)}(t-1) + \binom{0}{0} y^{(1)}(t-1) y^{(1)}(t) = \\
 &= -\alpha y^{(2-1)}(t-1) + \binom{2-2}{1-1} y^{(1)}(t-1) y^{(2-1)}(t) = \\
 &= -\alpha y^{(k-1)}(t-1) + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-2}{i-1} y^{(i)}(t-1) y^{(k-i)}(t).
 \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy valamely $k \geq 2$ -re igaz az állítás. Nézzük a $k+1$ esetet.

$$\begin{aligned}
 y^{(k+1)}(t) &= \left(y^{(k)}(t) \right)' = \\
 &= \left(-\alpha y^{(k-1)}(t-1) + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-2}{i-1} y^{(i)}(t-1) y^{(k-i)}(t) \right)' = \\
 &= -\alpha y^{(k-1+1)}(t-1) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-2}{i-1} \left(y^{(i+1)}(t-1) y^{(k-i)}(t) + y^{(i)}(t-1) y^{(k-i+1)}(t) \right)
 \end{aligned}$$

Mivel az első tag már azonos, így vizsgálatainkat folytassuk a második taggal.

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-2}{i-1} \left(y^{(i+1)}(t-1) y^{(k-i)}(t) + y^{(i)}(t-1) y^{(k-i+1)}(t) \right) = \\
 &= \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-2}{i-1} \left(y^{(i+1)}(t-1) y^{(k-i)}(t) \right) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-2}{i-1} \left(y^{(i)}(t-1) y^{(k-i+1)}(t) \right) = \\
 &= \binom{k-2}{k-1-1} \left(y^{(k-1+1)}(t-1) y^{(k-k+1)}(t) \right) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{k-2} \binom{k-2}{i-1} \left(y^{(i+1)}(t-1) y^{(k-i)}(t) \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \binom{k-2}{1-1} \left(y^{(1)}(t-1)y^{(k-1+1)}(t) \right) + \\
 & + \sum_{i=2}^{k-1} \binom{k-2}{i-1} \left(y^{(i)}(t-1)y^{(k-i+1)}(t) \right) = \\
 & = \binom{k+1-2}{k+1-2} \left(y^{(k+1-1)}(t-1)y^{(k+1-k)}(t) \right) + \\
 & + \binom{k+1-2}{0} \left(y^{(1)}(t-1)y^{(k+1-1)}(t) \right) + \\
 & + \sum_{i=2}^{k-1} \binom{k-2}{i-1-1} \left(y^{(i)}(t-1)y^{(k-i+1)}(t) \right) + \\
 & + \sum_{i=2}^{k-1} \binom{k-2}{i-1} \left(y^{(i)}(t-1)y^{(k-i+1)}(t) \right) = \\
 & = \binom{k+1-2}{k+1-2} \left(y^{(k+1-1)}(t-1)y^{(k+1-k)}(t) \right) + \\
 & + \binom{k+1-2}{0} \left(y^{(1)}(t-1)y^{(k+1-1)}(t) \right) + \\
 & + \sum_{i=2}^{k-1} \binom{k+1-2}{i-1} \left(y^{(i)}(t-1)y^{(k-i+1)}(t) \right)
 \end{aligned}$$

Azaz

$$y^{(k+1)}(t) = -\alpha y^{(k+1-1)}(t-1) + \sum_{i=1}^{k+1-1} \binom{k+1-2}{i-1} \left(y^{(i)}(t-1)y^{(k+1-i)}(t) \right),$$

mellyel az állítást bizonyítottuk. \square

Vegyük észre, hogy az (1)-es egyenletben csak az $y(t-1)$ érték szerepel, így a t időpillanatban az első derivált kiszámítható a $(t-1)$ pontbeli függvényérték ismeretében. A magasabbrendű deriváltak kiszámításához elegendő a t és a $(t-1)$ időpillanatban az alacsonyabbrendű deriváltak értéke. Tehát a t időpillanatban az összes deriváltat ki tudjuk számolni az alacsonyabbrendű deriváltaktól haladva a magasabbrendűek felé.

Az alábbi tétel szerint a megoldás létezéséhez elégséges feltétel, hogy a függvény folytonos legyen.

3.1. TÉTEL. Tekintsük az $y'(t) = f(y(t-1))$ ($t \geq 0$) késleltetett differenciálegyenletet, a $\phi(t)$ ($t \in [-1, 0]$) indulófüggvénnyel. Folytonos jobboldalú és folytonos indulófüggvénnyel adott explicit késleltetett differenciálegyenletnek létezik megoldása.

Bizonyítás. A tétel állítása hasonló a Cauchy-Peano-féle egzisztenciátételhez, de mivel mi most egy tisztán késleltetett differenciálegyenletről állítjuk ugyanazt, ezért a bizonyítás is egyszerűbb.

Elegendő a $[0, 1]$ időintervallumon vizsgálni a megoldást. Ha ezen intervallumon létezik folytonos megoldása, akkor a következő 1 hosszú intervallumra ugyanezt a bizonyítási eljárást alkalmazhatjuk.

Vegyük észre, hogy a $t \in [0, 1]$ időpontban a függvény értéke az alábbi formulával számolható:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t y'(x) dx = y(0) + \int_{-1}^{t-1} -\alpha(e^{y(x)} - 1) dx.$$

Ha tehát y' integrálható, akkor az y egy folytonos függvény lesz a $[0, 1]$ intervallumon. Ehhez az kell, hogy $y'(t)$ véges sok pont kivételével ne legyen folytonos. Ez pedig következik abból, hogy $y(t)$ folytonos a $[-1, 0]$ intervallumon. \square

A tételben szereplő f függvény folytonos, így mindig létezik egy megoldás, és a Taylor-polinom közelítésként alkalmazható rá. Ezek után azt vizsgáljuk meg, hogy hol lehetnek szakadási pontjai az (1)-es differenciálegyenletnek.

3.2. ÁLLÍTÁS. Az (1)-es differenciálegyenlet szakadási pontjaira az alábbiak igazak:

- a differenciálegyenletnek és magasabbrendű deriváltjainak csak az egészértékű pontokban lehet szakadási pontja,
- az i . deriváltak az $(i - 1)$ -nél nagyobb egész pontokban már nem lehet szakadási pontja ($i \geq 0$).

Bizonyítás. Az állítás bizonyításhoz a 3.1. Állításban szereplő képletet, valamint az (1)-es formulát kell megvizsgálni. Vegyük észre, hogy a vizsgált indulófüggvény is, és a deriváltjai is a $[-1, 0)$ intervallumon folytonosak. Legyen a vizsgált pont $t \geq 0$. A folytonos függvények megadott kombinációja folytonos függvény. A deriváltakra vonatkozó képletekben csak a t és $(t - 1)$ pontok szerepelnek. Valamely alacsonyabbrendű deriváltak ezen pontok valamelyikében szakadási pontjának kell lennie ahhoz, hogy szakadási pontja legyen a tekintett derivált függvénynek. Így ha van szakadási pont, akkor annak periódusa 1. A tekintett indulófüggvény első deriváltjának csak a 0-ban van szakadási pontja, így az első állítás igaz.

A második állítás igazolásához is elegendő a képletek alapján a folytonosságot vizsgálni. Az $i = 0$ esetben a függvényről állítjuk, hogy folytonos, melyet már láttunk az előző tételben. A magasabbrendű deriváltak esetében a képleteket megvizsgálva látható, hogy az i . deriváltak, akkor lesz szakadási pontja, ha a $0 \dots (i - 1)$ deriváltak közül legalább az egyiknek van szakadási pontja a t vagy a $(t - 1)$ pontok valamelyikében. Az indulófüggvény folytonos, így az első derivált is folytonos lesz 0 után, a második derivált pedig folytonos lesz 1 után és így tovább. Tehát a második állítás is igaz. \square

Mivel az első derivált folytonos a $t > 0$ időpillanatokban, így korlátos is. Vegyük észre, hogy az első derivált a $t = 0$ időpillanatban is korlátos. E két tulajdonságból következik, hogy az első derivált korlátos minden $[-1, t']$ időintervallumon, ahol $t' \geq -1$. Ebből a tulajdonságból következik a differenciálegyenlet megoldásának egyértelmősége is, de jelen cikkben ezt nem használjuk ki.

4. Megbízható numerikus módszerek

A számítógépeken történő számábrázolások elterjedt, hatékony formája a lebegőpontos számábrázolás. Ezzel csak bizonyos pontossággal tudunk számolni. Előfordulhat, hogy a számítások során az eredményt nem tudjuk pontosan ábrázolni számítógép segítségével. Egyik lehetőség, hogy az eredmény egy intervallumos befoglalását adjuk meg. Ekkor valós számok helyett intervallumokat használunk, melyekre definiálni kell a műveleteket. Példaként definiáljuk a négy alapműveletet.

4.1. Definíció. (intervallumaritmetika)

$$A \circ B = \{a \circ b \mid a \in A \text{ és } b \in B\},$$

$$A, B \in \mathbb{I} \text{ (}\mathbb{I} \text{ az } (i, j) \text{ párok halmaza, ahol } i, j \in \mathbb{R}, \text{ és } i < j\text{)}.$$

Ezt a következő konstruktív módon lehet megvalósítani:

$$\begin{aligned} [a, b] + [c, d] &= [a + c, b + d], \\ [a, b] - [c, d] &= [a - d, b - c], \\ [a, b] \cdot [c, d] &= [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)], \\ [a, b] / [c, d] &= [a, b] \cdot [1/d, 1/c], \text{ ha } 0 \notin [c, d]. \end{aligned}$$

Az intervallumok számítógépes ábrázolása során újabb probléma áll elő, ha az eredményintervallum határai nem ábrázolhatók számítógépen. Ezért kifeje kerekítjük a határpontokat, azaz vesszük a legközelebbi számítógépen ábrázolható számot. Ekkor az eredmény egy megbízható befoglalását kapjuk, azaz az eredmény intervallum tartalmazza a pontos eredményt.

Ilyen megbízható műveletek sorozatával megadható a függvényérték egy garantált befoglalása. Így az az elvárásunk, hogy egy többváltozós, intervallumos függvény eredményintervalluma minden többdimenziós intervallum esetén tartalmazza a valós függvénynek az adott helyen számított értékkészletét.

4.2. Definíció. $F(\mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I})$ befoglaló függvénye $f(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$ -nek az \mathbf{X} többdimenziós intervallumon, ha minden $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$ -re

$$f(\mathbf{Y}) = \{z : z \in \mathbb{R} \mid z = f(\mathbf{y}) \text{ és } \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\} \subseteq F(\mathbf{Y})$$

teljesül.

Megjegyzendő, hogy a megbízható műveletek sorozatával kiértékelt összetett függvények eredményintervalluma sokszor bővebb lesz, mint a valódi értékkészlet, úgynevezett túlbecslést eredményező intervallum lesz. A másik probléma, hogy nem minden függvény értékelhető ki véges számú aritmetikai művelet elvégzésével. Gondoljunk csak a \sqrt{x} -re, a $\sin x$ -re, és a jelenlegi problémánkban használt e^x -re. Ezen függvények kiértékelésére az egyik lehetőség a jelen cikkben is alkalmazott módszer lehet. Így például az e^x -re az alábbi módszert alkalmazzák:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \in \sum_{n=0}^k \frac{x^n}{n!} + [-2, 2] \frac{x^{k+1}}{(k+1)!},$$

ha $0 \leq x \leq 1$. Részletesebben olvashatunk az intervallumaritmetikáról az [1, 12] dolgozatokban.

Az intervallumos műveleteket támogató intervallumos könyvtárak léteznek C és C++ környezetben [8, 10], melyeket több esetben is használtunk matematikai bizonyításokban [2, 3, 6]. A jelen problémát mind a C-XSC, mind a Profil/Bias könyvtár használatával megvalósítottuk. Mindkét könyvtár az „Interval” típus végpontjait C-beli double típussal ábrázolja. A végpontok pontossága befolyásolja az intervallumaritmetika pontosságát. Esetünkben ez az alap típus nem volt elegendően pontos. Mindkét könyvtárban megtalálható azonban egy nagyobb precizitást szolgáló intervallum típus. A C-XSC a végpontokat több double típussal írja le [8], és ezek száma beállítható. Míg a Profil/Bias esetén a kívánt pontosságot lehet megadni [9].

5. Az intervallumos befoglalás használata

Az intervallumaritmetika segítségével megbízható számítások végezhetők, így alkalmas bizonyos problémák matematikai erejű bizonyítására. Jelen esetben a bizonyításhoz a Lagrange-féle maradéktaggal ellátott Taylor-polinom intervallumos megvalósítása jól használható. A matematikai bizonyításhoz a formulákat megbízható alakban, intervallumos befoglaló függvényekkel kell használni. A módszerünk alapja, hogy az r_n -re megpróbálunk egy befoglaló intervallumot adni. Ennek segítségével már be tudjuk foglalni a $y(x)$ megoldást.

5.1. ÁLLÍTÁS. Az x időpontban ($x \geq x_0$) a függvényérték befoglalására, azaz $y(x) \in Y(x)$, a Lagrange-féle maradéktaggal ellátott Taylor-polinom az alábbi formában alkalmazható:

$$Y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} Y^{(k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!} + R_n,$$

ahol

$$R_n = Y^{(n)}([x_0, x]) \frac{(x-x_0)^n}{n!}.$$

Bizonyítás. Egy konkrét pontban a függvényérték befoglalásához az r_n értéket kell befoglalni, mivel a (2)-es képlet első tagja egyszerűen meghatározható. Természetesen e tag kiértékelését is megbízhatóan kell elvégezni, hogy garantált befoglalást kapjunk rá. A (3)-as formula szerint létezik olyan $x^* \in [x_0, x]$, melyre r_n pontos. Ha az r_n befoglalását a (3)-as formulával határozzuk meg az $[x_0, x]$ intervallumon, akkor az $Y(x)$ befoglalás korrekt lesz, azaz $y(x) \in Y(x)$. \square

Az 5.1. Állítás alkalmazásához szükség van az $Y^{(n)}([x_0, x])$ értékre. Ez egy magasabbrendű derivált, melyre láttuk, hogy meghatározásához szükség van $y(t-1)$ -re, azaz szükségünk van az $Y([x_0-1, x-1])$ befoglalásos intervallumára. Az előző módszer megfelelő módosításokkal működik az $[x_0, x]$ intervallumon is.

5.2. ÁLLÍTÁS. Az $[x_0, x]$ időintervallumon a függvényérték befoglalására, azaz $y([x_0, x]) \subseteq Y([x_0, x])$, a Lagrange-féle maradéktaggal ellátott Taylor-polinom az alábbi formában alkalmazható:

$$Y([x_0, x]) = \sum_{k=0}^{n-1} Y^{(k)}(x_0) \frac{([0, x-x_0])^k}{k!} + R_n,$$

ahol

$$R_n = Y^{(n)}([x_0, x]) \frac{([0, x-x_0])^n}{n!}.$$

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges $x' \in [x_0, x]$ pontot. Ekkor azt kell belátni, hogy az $Y([x_0, x])$ befoglalás tartalmazza az $y(x')$ értéket. Az előbbiekből láttuk, hogy az $Y(x')$ intervallumnak eleme az $y(x')$ érték. Vegyük észre, hogy az $[x_0, x']$ intervallum részintervalluma az $[x_0, x]$ -nek, illetve $(x'-x_0)$ része a $[0, x-x_0]$ intervallumnak. Ezen befoglalásokat felhasználva látható, hogy az $Y([x_0, x])$ befoglaló intervalluma tartalmazza az $Y(x')$ értéket, mellyel az állítást igazoltuk. \square

5.1. TÉTEL. A fenti formulákkal megbízható befoglalás adható az (1)-es differenciálegyenlet megoldására.

Bizonyítás. Egy teljes indukcióhoz hasonló gondolatmenettel belátható a tétel. A $[-1, 0]$ intervallum minden pontjában ismert a $0, \dots, n$ -edik deriváltak egy-egy befoglalása. Tegyük fel, hogy minden $-1 \leq t \leq x$ -re tudjuk a függvény és a deriváltak befoglalását. Tekintsünk egy tetszőleges $x_0 \in [x, x+1]$ pontot. Ekkor az első deriváltak befoglalása kiszámítható az x_0 pontban és az $[x, x_0]$ intervallumon az (1)-es képlettel. Mivel a magasabbrendű deriváltak meghatározásához elegendő az első derivált ismerete az $[x, x_0]$ intervallumon, valamint a magasabbrendű deriváltak az $[x-1, x_0-1]$ -en, így a 3.1. Állításban szereplő formulával számítható a magasabbrendű deriváltak befoglalása. A deriváltak ismeretében az 5.1. és az 5.2. Állítások alkalmazásával számítható a függvény egy befoglalása az x pontban és az $[x, x_0]$ intervallumon. Így x_0 -ig ismert a $0, \dots, n$ -edik deriváltak egy befoglalása. \square

A magasabbrendű deriváltak képlettel számíthatóak, és minden $t \geq -1$ pontban létezik megoldás. Így a bizonyításon alapuló eljárással egy adott indulófüggvényből bármely $t \geq 0$ pontban számolható a megoldás egy befoglalása.

Visszatérve a kezdeti problémához, azt kell megvizsgálnunk, hogy van-e olyan 1 hosszú szakasza a megoldás befoglalásának, amely teljes egészében a $[-0,075, 0,075]$ intervallumba esik. Ez a kérdés megbízhatóan eldönthető a befoglaló intervallumok végpontjainak vizsgálatával. Most nézzük meg, hogy milyen esetben nincs értelme folytatni a trajektória követését. Ehhez előbb a következő állítást fogjuk igazolni.

5.3. ÁLLÍTÁS. *A trajektória befoglalásának szélessége az x_0 pontban ($x_0 > x$) nem kisebb, mint az x -ben.*

Bizonyítás. Mivel $x_0 > x$, így az x_0 pont eléréséhez minimum egy lépés szükséges az x pontból. Így elegendő, ha belátjuk, hogy egyetlen lépésben sem csökken a befoglalás szélessége. Vegyük észre, hogy ha egy intervallumhoz intervallumaritmetika segítségével hozzáadunk egy másikat, akkor az eredeti intervallumnál nem kapunk kisebb szélességűt. Ugyanakkora szélességűt abban az esetben kapunk, ha a hozzáadott intervallum szélessége 0. Most vizsgáljuk meg az 5.1. Állításban szereplő képletet. Az összegzést kibontva pontosan n darab összeadás szerepel a képletben. A $k = 0$ esetben az $Y(x)$ -et kapjuk, melyhez már csak további intervallumokat adunk hozzá. Ezzel igazoltuk, hogy nem csökken a befoglalás szélessége. \square

Mivel a megoldásnak abszolút értékben kisebbnek kell lennie 0,075-nél, így a megfelelő sáv szélessége $2 \cdot 0,075$. Az állításból következik, hogy ha az x pontban a függvényérték befoglaló intervallumának szélessége legalább $2 \cdot 0,075$, akkor az $x_0 > x$ pontokban nem lesz kisebb. Így az x -nél nagyobb pontokban a feladatnak megfelelő szakaszt már nem találhatunk. Azaz a trajektória további követése nem vezethet sikerre.

6. Az ellenőrző eljárás

A függvény és derivált értékek befoglalását az x_i időpillanatban is és a $t_i = [x_{i-1}, x_i]$ időintervallumon is tároljuk. A trajektória követését az $x_i - x_{i-1} = c$ fix lépésközzel valósítjuk meg minden i -re, ahol c egy konstans. A számítógép pontosságára tekintettel, ezt a c konstanszt a számítógépen ábrázolható számok közül választjuk ki. A befoglalások számításához az x_i -ben, valamint a t_i -ben az $(x_i - 1)$ és a $(t_i - 1)$ időbeli értékekre van szükség. Ezért érdemes a c konstanszt úgy megválasztani, hogy ha az x_i -ben van végpont, akkor az $(x_i + 1)$ -ben is legyen. Így a befoglalásokat nem kell újra számolni több befoglalásból. A c konstans minden esetben 2^{-n} alakú, ahol $n \in \mathbb{N}^+$. A kezdeti 1 hosszú szakaszon a függvény értékére és deriváltjaira könnyen adható befoglalás minden x_i és t_i időkhben.

Két listában tároljuk az x_i és a t_i időkben a függvény és a derivált értékek befoglalását. A két listát a későbbiekben \mathcal{X} -szel és \mathcal{T} -vel jelöljük. Ezen függvény-leírásból mindkét listában pontosan n darab lesz. A \mathcal{T} lista összes eleme pontosan 1 hosszú szakaszt tartalmaz, mely minden egyes pontjában befoglalja a függvényt. Ez elegendő a feltett kérdés megválaszolásához.

Az eljárás a listákat bővíteni fogja a következő x_i és t_i időkben a függvény és a derivált értékek befoglalásával. Az 5.1. Tételből következik, hogy a befoglalások kiszámításához elegendő a \mathcal{T} lista első eleme, és az \mathcal{X} lista első és utolsó eleme. Az új befoglalásokat betesszük a listák végére, és az első elemet töröljük a listákból. A \mathcal{T} lista megint egy teljes, 1 hosszú időintervallumon írja le a függvényt.

Ezekkel a megkötésekkel elértük, hogy minden lépés előtt az alábbi állítások igazak:

- (1) A \mathcal{T} lista első eleme tartalmazza az N . lépésben az $y^{(i)}([(N - 2^n)/2^n, (N - 2^n + 1)/2^n])$ ($i = 0, \dots, K$) deriváltak befoglalásait.
- (2) Az \mathcal{X} lista első eleme tartalmazza az N . lépésben az $y^{(i)}([(N - 2^n + 1)/2^n])$ ($i = 0, \dots, K$) deriváltak befoglalásait.
- (3) Az \mathcal{X} lista utolsó eleme tartalmazza az N . lépésben az $y^{(i)}(N/2^n)$ ($i = 0, \dots, K$) deriváltak befoglalásait.

A \mathcal{T} és az \mathcal{X} lista következő elemeinek a meghatározásához éppen ezekre az értékekre van szükségünk. Ellenőrzéskor elegendő az új

$$Y([(N - 2^n)/2^n, (N - 2^n + 1)/2^n])$$

befoglalást megvizsgálni, és ha arra igaz az állítás, akkor egy számlálót növelni, egyébként nullázni. Ha a számláló elérte az 1 hosszú szakaszhoz szükséges értéket, akkor megtaláltuk a szakaszt, amely igazolja a feltételezést. Az 5.3. Állításból ismert, hogy a befoglalás szélessége a lépések során nem csökken. Tudjuk, hogy ha az $Y(N/2^n)$ befoglalás szélessége nagyobb, mint $2 \cdot 0,075$, akkor már nem fog belefélni a kívánt sávba. Ekkor az algoritmus sikertelen kereséssel áll meg.

6.1. Algoritmus. A trajektória követése.

- Input:**
- K : a használt legmagasabbrendű derivált rendje,
 - $1/2^n$: a lépés nagysága,
 - $k = 0,075$: a feladat kitűzésében szereplő konstans,
 - $\phi(s) \equiv -11$: az indulófüggvény.
- Output:**
- Az $[a, a + 1]$ intervallum, melyen a függvényérték abszolút értéke kisebb mint k , vagy
 - nem talált megfelelő intervallumot.

0. lépés: Töltsük fel a listákat a $[-1, 0]$ szakaszon levő befoglalásokkal, és legyen $N = 0$.

1. lépés: Vegyük ki a listák első elemét, és az \mathcal{X} lista utolsó elemét.

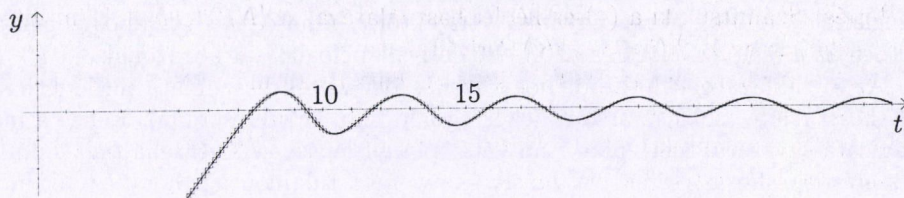
2. lépés: Számítsuk ki a (4)-es képlet használatával az $[N/2^n, (N+1)/n]$ intervallumon az $Y^{(i)}$ ($i = 1 \dots K$) deriváltakat.
3. lépés: Határozzuk meg a (4)-es képlet felhasználásával az $(N+1)$ pontban az $Y^{(i)}$ ($i = 1 \dots K$) deriváltakat.
4. lépés: Számítsuk ki az 5.1. Állítás segítségével az $[N/n, (N+1)/n]$ intervallumon az Y értékeket.
5. lépés: Határozzuk meg az 5.2. Állítás segítségével az $(N+1)/n$ pontban az Y értéket.
6. lépés: Frissítsük a két listát.
7. lépés: Legyen N új értéke $N+1$.
8. lépés: Ellenőrizzük az új $Y([(N-1)/2^n, N/n])$ befoglalást. Ha megfelel az $|x| \leq k$ feltételnek és elértük az 1 hosszú szakaszt, akkor az $[N/n-1, N/n]$ intervallum a megoldás, és STOP.
9. lépés: Ha az $Y((N+1)/n)$ pontban a befoglalás nagyobb mint $2 \cdot k$, akkor nem talált megfelelő intervallumot és STOP.
10. lépés: Folytassuk az 1. lépéssel.

Az algoritmus az 5.1. Tétel bizonyítása alapján készült, és minden számítása garantált. Az eljárás sikeres futása esetén matematikai bizonyossággal állíthatjuk, hogy létezik egy 1 hosszú szakasz a feladat megoldásaként. Egyébként nem állíthatjuk azt, hogy nem létezik ilyen szakasz, azaz a jelenleg használt számítási paraméterekkel a befoglalások növekedése miatt nem volt sikeres a kísérlet. Ebben az esetben nem zárható ki a feladatra egy ilyen szakasz létezése. Elméletileg előfordulhat, hogy az intervallum szélessége soha nem lesz a korlátnál nagyobb, és nem talál 1 hosszú szakaszt sem. Ekkor az eljárás egy végtelen ciklusba kerülne, de ez a számítógép véges pontosságát tekintve nem fordulhat elő.

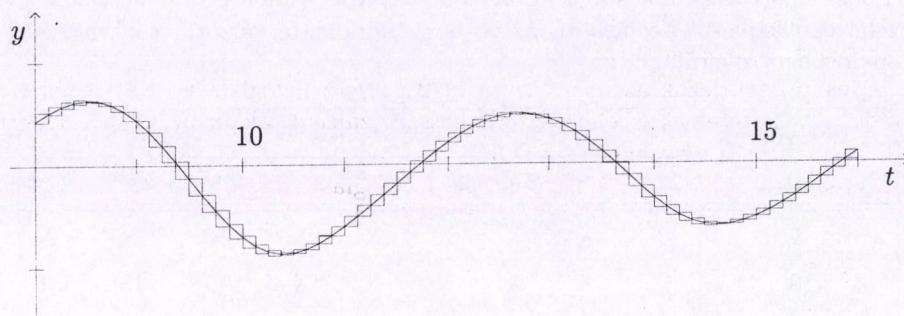
7. Eredmények

Első lépésben az $\alpha = 1,5$ esetet vizsgáltuk, melyre ismert, hogy a megoldás nullához tart. Ekkor találnunk kell egy megfelelő 1 hosszú szakaszt. A 25. deriváltig számoltuk a befoglalásokat, és a lépésmagyságot $2^{-3} = 1/8$ -nak választottuk. A dupla pontosságú adattípussal ábrázolt végpontú intervallum típus nem volt elegendő. Ehhez, az általunk vizsgált legegyszerűbb feladathoz is már szükség volt a nagyobb pontosságot használó intervallumaritmetikára. Az első megfelelő szakasz az $[56, 57]$ volt, amelyre $|Y([56, 57])| \leq 0,075$. Ennek megtalálásához 25 másodperc CPU időre volt szükség egy egyszerű asztali számítógépen (Pentium IV, 2,2 GHz-es processzor).

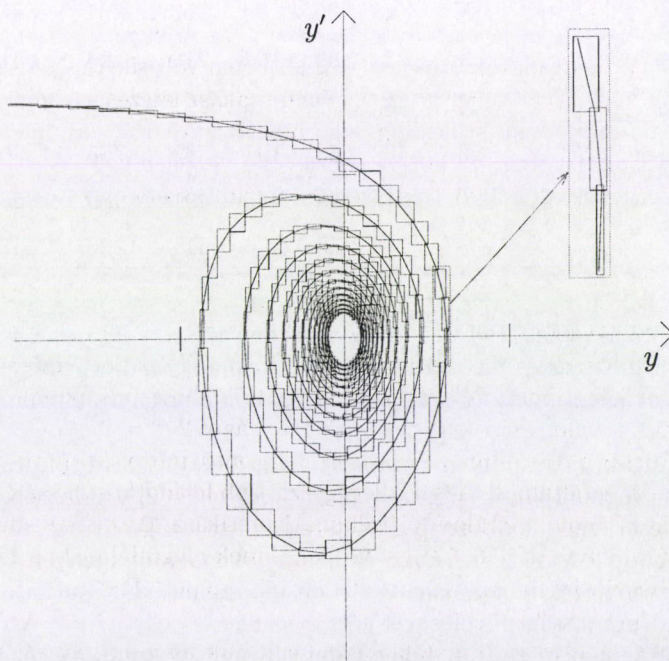
Az 2. ábrán a trajektória befoglalását láthatjuk az idő függvényében. Mivel a lépés nagysága 2^{-3} , így egy 1 hosszú szakasz felett pontosan 8 darab befoglalás található. A szomszédos befoglaló téglalapok függőleges oldalai pontosan egy egyenesre illeszkednek, és ezek az oldalak nem csatlakoznak a végpontjaikban, hanem átfedik egymást. Ez az átfedés tartalmazza az adott időben a függvényérték



(a) A teljes trajektória egy részlete.



(b) Az (a) ábrán látható befoglalás egy kinagyított részlete.



(c) A teljes trajektória az y és y' térben.

2. ábra. A trajektória közelítése az $\alpha = 1,5$ esetben és annak garantált befoglalása.

befoglalását. A 2(c). ábrán ugyanaz a trajektória látható. A téglalapok ebben az esetben az y függvényérték és az y' első derivált befoglalását ábrázolják.

Az 1. táblázatban látható, hogy azonos deriváltak használata mellett, ha a lépéshossz felére csökken, akkor a szükséges idő kb. kétszeresére nő. Ennek a magyarázata egyszerű, mert pontosan kétszerannyi lépést kell végrehajtani, mint a kétszeres lépéshossz esetén. A másik észrevehető tulajdonság, hogy az alkalmazott deriváltak maximális számának csökkentésével csökken a szükséges CPU idő is. Ennek magyarázata a magasabbrendű deriváltak számításához használt egyre összetettebb képlet. De látható az is, hogy mindkettő túlzott csökkentésével a bizonyítás nem sikerül.

A deriváltak száma	Lépéshossz								
	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
5	X	X	X	X	X	X	X	X	X
10	X	X	X	X	X	X	105	213	431
15	X	X	X	X	45	93	187	373	771
20	X	X	X	35	73	150	291	585	1157
25	X	X	25	53	107	212	424	851	1695
30	X	X	36	72	146	292	584	1169	2314
35	X	23	48	96	191	383	765	1530	3055
40	X	30	61	123	245	491	980	1956	3903
45	X	38	77	153	306	611	1220	2437	4862

1. táblázat. Szükséges CPU idő (másodpercben) az $\alpha = 1,5$ eset vizsgálatakor. A táblázat sorai az összes használt derivált maximális rendjét, míg az oszlopok a lépés nagyságát jelentik. Az X-szel jelölt esetekben a bizonyítás nem sikerült.

Megvizsgáltuk, hogy milyen pontosság érhető el a számítások során használt intervallumok végpontjainak pontosságával, melyek a 2. táblázatban láthatók. Az $\alpha = 1,5$ esetben különböző paraméterekkel követtük a trajektóriát a $[0, 50]$ időintervallumon. Megnéztük, hogy ez mennyi CPU időt igényelt, és mennyire pontos a függvényérték befoglalása a $t = 50$ időpillanatban. Látható, hogy a kívánt számítási pontosság növelésével nőtt a szükséges CPU idő. Azonban az elérhető pontosságot nem tudjuk kihasználni, ha nem használunk magasabbrendű deriváltakat. A számítási pontosságot nem változtatva, csak magasabbrendű derivált használatával, nem tudunk nagyobb pontosságot elérni. Így minden számítási pontossághoz tartozik egy optimális deriváltrend, és minden használni kívánt deriválthoz létezik egy optimális számítási pontosság. Azaz a számítási pontosságot

növelve magasabbrendű deriváltakat is használhatunk, de ekkor a CPU idő is nő. Míg az 1. táblázatban láthattuk, hogy minden lépéshosszhoz használni kell egy minimális nagyságú rendet. Más szóval, a magasabbrendű deriváltak használatával csökkenthetjük a lépéshossz nagyságát, mellyel a CPU idő is csökken. Összegezve láthatjuk, hogy a szükséges CPU idő a lépés nagyságtól és a számítási pontosságtól függ, melyek fordított arányban állnak egymással.

A deriváltak száma	Az intervallumok k dupla pontos számítással			
	k = 1	k = 2	k = 4	k = 8
15	6 sec $2,78 \cdot 10^0$	9 sec $2,01 \cdot 10^{-1}$	12 sec $2,01 \cdot 10^{-1}$	21 sec $2,01 \cdot 10^{-1}$
20	11 sec $2,58 \cdot 10^0$	15 sec $7,70 \cdot 10^{-5}$	19 sec $7,70 \cdot 10^{-5}$	32 sec $7,70 \cdot 10^{-5}$
25	17 sec $2,58 \cdot 10^0$	23 sec $2,86 \cdot 10^{-9}$	28 sec $2,86 \cdot 10^{-9}$	46 sec $2,86 \cdot 10^{-9}$
30	24 sec $2,58 \cdot 10^0$	32 sec $7,24 \cdot 10^{-14}$	40 sec $7,24 \cdot 10^{-14}$	63 sec $7,24 \cdot 10^{-14}$
35	32 sec $2,58 \cdot 10^0$	43 sec $2,60 \cdot 10^{-15}$	54 sec $2,06 \cdot 10^{-19}$	84 sec $2,06 \cdot 10^{-19}$
40	42 sec $2,58 \cdot 10^0$	55 sec $2,60 \cdot 10^{-15}$	70 sec $7,89 \cdot 10^{-23}$	108 sec $7,89 \cdot 10^{-23}$
⋮				
75	145 sec $2,58 \cdot 10^0$	182 sec $2,60 \cdot 10^{-15}$	249 sec $1,79 \cdot 10^{-47}$	390 sec $3,01 \cdot 10^{-54}$
80	164 sec $2,58 \cdot 10^0$	206 sec $2,60 \cdot 10^{-15}$	282 sec $1,79 \cdot 10^{-47}$	446 sec $2,11 \cdot 10^{-58}$

2. táblázat. Szükséges CPU idő (másodpercben) és a $t = 50$ időpillanatban a függvényérték befoglalásának szélessége az $\alpha = 1,5$ eset vizsgálatakor. A táblázat sorai az összes használt derivált maximális rendjét, míg az oszlopok a számítások során használt intervallumok végpontjainak pontosságát jelentik (C-XSC-ben).

Az eddigi eredményekből láthatjuk, hogy a használt lépésnagyság, a számítási pontosság és a maximális deriváltrend erősen befolyásolja a bizonyítás sikerességét és annak idejét. Ezen paraméterek optimális beállítása egy újabb probléma. Nézzük meg, hogyan alakul a trajektória befoglalásának szélessége. A 3. táblázat az adott időpillanatra a befoglaló intervallum szélességét tartalmazza. Láthatjuk, hogy egy egységnyi idő alatt a befoglalás szélessége körülbelül a kétszeresére nő. Ez az arány más α értékekre is csak kicsit romlik. Közelítő számításokból tud-

juk, hogy a feltett kérdésre melyik lehet a megfelelő 1 hosszú szakasz. Ebből a két tulajdonságból már meghatározható, hogy hol milyen széles lehet a befoglaló intervallum egy sikeres bizonyítás esetén.

t	szélesség	t	szélesség	t	szélesség	t	szélesség
1	$9,12 \cdot 10^{-31}$	11	$1,97 \cdot 10^{-23}$	21	$8,66 \cdot 10^{-20}$	31	$1,88 \cdot 10^{-15}$
2	$2,26 \cdot 10^{-30}$	12	$9,33 \cdot 10^{-23}$	22	$2,06 \cdot 10^{-19}$	32	$4,60 \cdot 10^{-15}$
3	$2,71 \cdot 10^{-30}$	13	$2,30 \cdot 10^{-22}$	23	$4,59 \cdot 10^{-19}$	33	$1,02 \cdot 10^{-14}$
4	$3,37 \cdot 10^{-30}$	14	$6,29 \cdot 10^{-22}$	24	$8,43 \cdot 10^{-19}$	34	$2,32 \cdot 10^{-14}$
5	$3,89 \cdot 10^{-30}$	15	$1,35 \cdot 10^{-21}$	25	$1,64 \cdot 10^{-18}$	35	$5,31 \cdot 10^{-14}$
6	$4,24 \cdot 10^{-30}$	16	$2,30 \cdot 10^{-21}$	26	$6,93 \cdot 10^{-18}$	36	$1,05 \cdot 10^{-13}$
7	$4,90 \cdot 10^{-30}$	17	$4,58 \cdot 10^{-21}$	27	$1,16 \cdot 10^{-17}$	37	$2,05 \cdot 10^{-13}$
8	$7,33 \cdot 10^{-30}$	18	$1,13 \cdot 10^{-20}$	28	$3,46 \cdot 10^{-17}$	38	$4,49 \cdot 10^{-13}$
9	$2,85 \cdot 10^{-28}$	19	$2,49 \cdot 10^{-20}$	29	$2,22 \cdot 10^{-16}$	39	$9,95 \cdot 10^{-13}$
10	$2,24 \cdot 10^{-25}$	20	$4,42 \cdot 10^{-20}$	30	$6,38 \cdot 10^{-16}$	40	$1,98 \cdot 10^{-12}$

3. táblázat. A befoglalás szélességének alakulása a t időpillanatban az $\alpha = 1,5$ esetben.

Az eddigi ismereteink alapján összeállítottunk egy optimalizáló eljárást [5] a paraméterek helyes beállítására. Az eljárás egy korlátos, három paraméteres egészértékű optimalizálási problémát old meg. A három paraméter a lépésmagyság, a műveletek pontossága és a maximális deriváltrend. Ezen paraméterek mellett követjük a trajektóriát egy adott konstans ideig. Az ehhez szükséges CPU időt fogjuk minimalizálni. A korlátozó feltétel pedig legyen az, hogy ebben az időpillanatban a befoglalás maximális szélessége ne legyen nagyobb, mint egy adott konstans.

Ez az eljárás az $\alpha = 1,5$ -re a 20 időpillanatban a 10^{-20} -os korlátozó feltétellel a végső befoglalás szélességére a 10,6 másodperces optimumot adta. Az optimális megoldás:

- Deriváltak száma: 28,
- Lépésmagyság: 2^{-3} ,
- Számítás: 2 dupla pontos számmal.

Ez az eredmény közel azonos a korábban tapasztaltakkal. A magasabbrendű deriváltakra vonatkozó követelményt a korlát túl kicsire állításával lehet magyarázni. A 10^{-20} -os korlátnál nagyobb is elegendő a bizonyításhoz. Az optimum értékéből a szükséges teljes időre a $10,6 \cdot \frac{54}{20} = 28$ másodperces becslést kaphatjuk, mely úgyszintén igazodik az eddigi eredményeinkhez.

A következő lépésként egy α intervallumon próbáltuk bizonyítani a feladat állítását. Mivel a kezdeti intervallumok szélessége erősen befolyásolja a későbbi befoglalások pontosságát, így széles intervallumokkal nem dolgozhatunk α esetében. Az $\alpha = [1, 5, 1, 5 + 10^{-22}]$ a legszélesebb olyan intervallum, melyre sikerült bizonyítani a feladat állítását. A futási paraméterek és a szükséges CPU idő hasonló volt, mint az előző esetben.

A harmadik kísérletben egy nagyobb α -t választottunk,

$$\alpha = 1,546875 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64},$$

amely pontosan ábrázolható számítógépen. Ehhez magasabbrendű deriváltakat is kellett használni.

Lépéshosszként $2^{-4} = 1/16$ -ot használtunk. Ekkor a $[115, 938, 116, 938]$ intervallum volt az első olyan 1 hosszú szakasz, mely teljesítette a feltételt. A feladat bonyolultságát jelzi, hogy ehhez már több órányi CPU időre volt szükség.

A továbbiakban több α értékkel is futtattuk a programot. Minél nagyobb volt az α értéke, azaz minél jobban közelítettünk a $\pi/2$ -höz, annál nagyobb pontosságra volt szükségünk. Ennek következtében a szükséges deriváltak száma, valamint a számításhoz használt CPU idő is jelentősen megnőtt. Az ellenőrizhető α intervallumok szélessége pedig erősen csökkent.

A programot több beállítással is futtattuk, egy a $\pi/2$ -nél kicsit kisebb, számítógépen pontosan ábrázolható, α értékkel is. Ezen tesztek eredményéből azt a következtetést vontuk le, hogy a számításokhoz szükséges pontosság legalább 10^{-500} , és a szükséges CPU idő több mint 100 nap. Elméletileg a $\pi/2$ -re is lehetne igazolni az állítást. A $\pi/2$ környezetében megjelenő periodikus pályák szélsőértékei kicsik. Az ezekhez tartó megoldások esetében is létezhet egy megfelelő 1 hosszú szakasz. Ebben az esetben a $\pi/2$ értéket befoglaló intervallummal számolva igazolható a kérdés.

Összefoglalva, a feladat bizonyítása a teljes $\alpha = [1, 5, \pi/2]$ intervallumra az óriási CPU idő miatt ezzel a módszerrel egyelőre nem lehetséges, bár a program az intervallum bármely pontjára, illetve annak szűk intervallumára képes matematikai bizonyítást adni.

8. Összefoglalás

Egy késleltetett differenciálegyenlet viselkedésének vizsgálatára adtunk megbízható módszert. Ezen eljárás alapja a szokásos differenciálegyenleteknél használt Taylor-sor egy megbízható formája.

A bizonyítás sikere minden esetben azon múlt, hogy mennyire pontosan számoltunk. Ennek két összetevője volt, az alkalmazott Taylor-polinom fokszáma, illetve a számítás pontossága. Mind a kettő erősen befolyásolta a számítási igényt is. Sikertelen volt a teljes állítás bizonyítása egy futáson belül.

A tapasztalatok alapján, ha α tart a $\pi/2$ -höz, akkor a probléma egyre nehezebb, de a trajektóriák viselkedése hasonló marad. Ha nincs az $[1, 5, \pi/2]$ intervallumon belül szokatlanul viselkedő rész, akkor az intervallum bármely pontjára, illetve annak egy elegendően szűk intervallumára képesek vagyunk matematikai bizonyítást adni.

A jelen módszer alkalmazható lehet egyéb késleltetett differenciálegyenletek vizsgálatakor is.

9. Köszönetnyilvánítás

A szerző köszöni az Osztrák-Magyar (öu56011), valamint a Spanyol-Magyar (E-25/04 sz.) együttműködési pályázatok és az Országos Tudományos Kutatási Alapprogramok által finanszírozott (T 037491, T 048377) pályázatok támogatását.

Hivatkozások

- [1] G. ALEFELD – J. HERZBERGER: *Introduction to Interval Computations*. Academic Press Inc., (1983)
- [2] B. BÁNHÉLYI – T. CSENDES: *A verified computational technique to locate chaotic regions of Hénon systems*. Proceedings of the 6th International Conference on Applied Informatics (konferenciaanyag), (2004), (297–304. p.)
- [3] B. BÁNHÉLYI – T. CSENDES – B. M. GARAY: *Optimization and the Miranda approach in detecting horseshoe-type chaos by computer*. International Journal of Bifurcation and Chaos (megjelenik 2007-ben)
- [4] M. BERZ – K. MAKINO – K. SHAMSEDDINE, – G. HOFFSTÄTTER – W. WAN: *Computational Differentiation: Techniques, Applications, and Tools*. COSY INFINITY and its Applications to Nonlinear Dynamics, SIAM, (1996), (365–367. p.)
- [5] T. CSENDES: *Nonlinear parameter estimation by global optimization - efficiency and reliability*. Acta Cybernetica 8. (1988), (361–370. p.)
- [6] T. CSENDES – B. M. GARAY – B. BÁNHÉLYI: *A verified optimization technique to locate chaotic regions of a Hénon system*. Journal of Global Optimization 53. (2006), (145–160. p.)
- [7] T. CSENDES – B. BÁNHÉLYI – L. HATVANI: *Towards a computer-assisted proof for chaos in a forced damped pendulum equation*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 199. (2007), (378–383. p.)
- [8] R. KLATTE – U. KULISCH – C. LAWO – M. RAUCH – A. WIETHOFF: *C-XSC: A C++ Class Library for Extended Scientific Computing*. Springer-Verlag, Berlin, (1993)

- [9] O. KNÜPEL: *A Multiple Precision Arithmetic for PROFIL*. Berichte des Forschungsschwerpunktes Informations- und Kommunikationstechnik, TU Hamburg-Harburg **93.6**, (1993)
- [10] O. KNÜPEL: *PROFIL – Programmers Runtime Optimized Fast Interval Library*. Berichte des Forschungsschwerpunktes Informations- und Kommunikationstechnik, TU Hamburg-Harburg, **93.4**, (1993)
- [11] T. KRISZTIN: *Periodic orbits and the global attractor for delayed monotone negative feedback*. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations **15**, (2000), (1–12. p.)
- [12] R. E. MOORE: *Interval Analysis*. Prentice-Hall, (1966)
- [13] N. S. NEDIALKOV – K. R. JACKSON – G. F. CORLISS: *Validated Solutions of Initial Value Problems for Ordinary Differential Equations*. Applied Mathematics and Computation **105**, (1999), (21–68. p.)
- [14] E. M. WRIGHT: *A non-linear difference-differential equation*. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, **194**, (1955), (66–87. p.)

(Beérkezett: 2005. december 12.)

BÁNHÉLYI BALÁZS
 SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
 INFORMATIKAI TANSZÉKCSOPORT
 6720 SZEGED, ÁRPÁD TÉR 2.
 bannahelyi@inf.u-szeged.hu

DISCUSSION OF A DELAYED DIFFERENTIAL EQUATION WITH VERIFIED COMPUTING TECHNIQUE

BALÁZS BÁNHÉLYI

Consider the following delayed differential equation:

$$y' = -\alpha \left(e^{y(t-1)} - 1 \right),$$

where $\alpha \in \mathbb{R}^+$ is a parameter. Let the initial function be

$$\phi(s) \equiv -11,$$

where $s \in [-1, 0]$.

When $\alpha \leq 1, 5$, it is known, that the trajectory converges to zero, and when $\alpha \geq \pi/2$, the trajectory converges to different periodic solutions too. The analysis of the convergence to zero

is very hard with numerical methods, so we consider an easier problem. We are interested in checking whether for all $\alpha \in [\frac{3}{2}, \frac{\pi}{2}]$, there exists a unit length time segment where the absolute value of the solution is less than 0,075.

Most verified techniques for solving ordinary differential equations apply a Taylor series. Our technique is based on the same idea too.

In this case the verification means mathematical verification, hence rounding and other errors were considered. Instead of real numbers, we can also calculate with intervals. In case the bounds of the result interval are not representable, then they are rounded outward. In this problem we used the Multiple Precision Interval Arithmetic libraries (C-XSC, PROFIL/BIAS).

We use two fix length lists to store the solution bounds. The first list contains the solution and the derivatives on time intervals, which cover the unit length time segment. The other list stores the solution and the derivatives in concrete time points. We calculate the new elements of the lists with earlier discussed formula. The oldest elements are deleted from the lists, and the new ones are inserted. This technique has three parameters: step length, maximum derivate rank, and a precision of the interval arithmetic. We combine our method and optimization technique to determine the optimal values for these parameters.

We proved the above statement for some tiny intervals around certain computer representable numbers, but we were not able to prove it for all points of the α parameter interval.

DR. BALLA KATALIN (1947–2005)

FARAGÓ ISTVÁN, GALÁNTAI AURÉL



Súlyos veszteség érte a hazai alkalmazott matematika közösségét: hosszan tartó, súlyos betegség után 2005. júniusában eltávozott közülünk Balla Katalin.

Balla Katalin 1970-ben szerzett matematikusi diplomát a Moszkvai Állami Egyetemen. Ezután előbb ösztöndíjas gyakornokként, két évvel később pedig már tudományos segéd munkatársként az MTA SZTAKI jogelődjének tekinthető MTA Számítástechnikai központba került, és ebben az intézetben dolgozott teljes életpályája során.

Értékes tudományos munkája, eredményei vezetői feladatra is alkalmassá tették. 1980 és 1990 között a Matematikai fizika, majd a Matematikai szoftverek osztály vezetője volt. Az intézeti szervezeti változások után 1992-ben lett az Operációkutatás és Döntési Rendszerek Laboratórium főmunkatársa. Emellett 2002-től egyetemi tanári kinevezést kapott a Miskolci Egyetem Matematikai Intézetében.

Balla Katalin sokoldalú, több területen is jelentős eredményeket maga után hagyó, sikeres tudós volt. A továbbiakban, a teljesség igénye nélkül szeretnénk néhányat kiemelni.

1. Balla Katalin, a kutató

Kutatási területe a numerikus és a tágabb értelemben vett alkalmazott matematika volt. Ezt tanúsítja szakmai életpályája és publikációs tevékenysége is.

Kutatómunkáját kezdettől fogva mindvégig az önmagával szembeni igényes elvárás, igazi tudományos elkötelezettség jellemezte.

1974-től Abramov professzor levelező aspiránsa volt a Leningrádi Állami Egyetemen, ahol 1978-ban sikeres védés után lett a matematikai tudomány kandidátusa. A további sikeres és nemzetközileg is elismert jelentős tudományos eredményei, publikációi alapozták meg az MTA doktori értekezését, amelyben az elméleti és gyakorlati szempontból is fontos differenciál-algebrai egyenletek egy részosztályára dolgozta ki az adjungált-elméletet. A „Differential algebraic equations and their adjoints” c. értekezésének tárgya a differenciál-algebrai egyenletek olyan nem autonóm, közönséges, implicit lineáris differenciálegyenlet rendszerei, amelyekből az alapváltozók deriváltjai nem fejezhetők ki explicit módon. Az ilyen típusú rendszerek vizsgálata gyakorlati szempontból is fontos, de ugyanakkor igen nehéz feladat. Dolgozatának jelentős érdeme a kezelhetőségi index fogalmának újragondolása és alkalmazása. A védési bizottság megállapítása szerint: „Az értekezés a szerzőnek egy fontos, nehéz (és talán ezért kevesek által művelt) területen elért értékes eredményeit foglalja össze, és hazánkban ebben az irányban úttörőnek tekinthető.” Egybehangzóan az volt a vélemény, hogy a dolgozat tételeinek bizonyítása egzakt és logikailag teljes, a szereplő eredmények eredetiek, jók és jelentős mértékben viszik előre ezen a területen a kutatást.

A dolgozat ritka sikerű védése, Balla Kati meggyőző válaszai szívósorító körülmények között zajlottak, és ez az utolsó fellépése talán minden erőtartalmát igénybe vette. A fokozat megítélését sajnos már nem érhetette meg.

A tudományos tevékenységét több mint negyven színvonalas publikáció, számos (több mint ötven) független hivatkozás és több, a SZTAKI-ban odaítélt tudományos elismerés is jellemzi. (Többek között Intézeti Ifjúsági Díj (1973), Intézeti Díj (1996, 1999), Intézeti Publikációs Díj (1997), stb.)

2. Balla Katalin, az oktató

Balla Katalin tevékenységének fontos eleme volt az egyetemi oktatás, az alap- és a kutatói (PhD) képzés területén egyaránt.

Számos hazai tudományegyetem oktatási tevékenységében vett részt. Kezdetben óraadóként Szegeden, majd az ELTE-n tartott órákat. Ezután 1994-ben a BME-n docensi kinevezést kapott, és itt 1996-ban habilitált is. Később bekapcsolódott a Budapesti Corvinus Egyetem oktatásába is. Máig is emlékezetes kurzusokat tartott az ELTE Alkalmazott Matematika Doktori Iskolájában. 2002-től a Miskolci Egyetemen kinevezett egyetemi tanár lett, ahol oktatói tevékenységét

mindvégig folytatta. Itt a programozó matematikus szak matematikai analízis tárgyának előadója volt. E tárgyhöz jegyzetet is készített.

Nagy és széleskörű szakmai tudására jellemző, hogy a szűkebb kutatási területei mellett a matematika számos egyéb területén is oktatott. Hallgatói tisztelték és szerették, hiszen mindig felkészülten, nagy lelkiismerettel tartotta meg óráit.

Oktatói munkáját egyetemi elismerésekkel is jutalmazták.

Szívesen foglalkozott a fiatalokkal. Hallgatói bármikor fordulhattak Hozzá kérdéseikkel, problémaikkal. PhD témavezetője volt Linh, V.H. hallgatónak, aki sikeres magyarországi védése után már nemzetközileg is számontartott tudósnak számít.

3. Balla Katalin és a tudományos közélet

Balla Katalin aktív és nélkülözhetetlen résztvevője volt a hazai és nemzetközi szakmai közéletnek. Tudására, széles látókörére, hasznos tapasztalataira számos bizottság és tudományos fórum tartott igényt. 1995-2005 között tagja volt a BME Alkalmazott Matematika Habilitációs Bizottságának és Doktori Tanácsának. Az ELTE Alkalmazott Matematikai Doktori Iskola alapító tagja, illetve a CORVINUS Egyetem (BKÁE) Doktori Iskolájának külső tagja is volt.

Ugyancsak külső tagja volt a Miskolci Egyetem Hatvány József Doktori Iskolájának.

2002-2005 között folyamatosan bizottsági tag volt az ELTE Alkalmazott Matematika Államvizsgabizottságában.

2004-2005 között a MAB Matematikai Bizottságának volt tagja.

Több hazai szakmai folyóiratnak volt szerkesztőbizottsági tagja. Többek között az Alkalmazott Matematikai Lapoknál, illetve a Hungarian Electronic Journalnál (Section Math.).

Fontosnak tartjuk megemlíteni, hogy Balla Kati egyike volt a kezdetben Rózsa Pál nevével fémjelzett, a hazai numerikus matematika nemzetközi megismertetésében és elfogadtatásában kiemelkedő szerepet játszó Numerical Methods nemzetközi konferencia megszervezőinek. Az első konferencia Tihanyban (1968), a második és harmadik Keszthelyen (1973, 1977) volt. Utána rendszeresen Miskolcon lett megtartva ez a nemzetközi szinten is számontartott rendezvény. Kati mindvégig aktív szervezője volt a konferenciáknak, illetve a konferenciakiadvány szerkesztésének.

Nyelvismerete (orosz, angol, német nyelveken tudott magas szinten) lehetővé tette, hogy több külföldi intézménnyel és kutatóval rendszeres kapcsolatot tartson fenn. Szakmailag talán két hely különösen fontos volt a számára: a berlini Humboldt Egyetem, ahol 1991-2003 szinte évente 8-10 napot töltött és ahol több értékes dolgozata született; valamint a moszkvai SZUTA/OTA Számítóközpont, ahol volt témavezetőjével, illetve annak tanítványaival folytatott közös kutatáso-

kat. Megemlítendő még a Bécsi Műszaki Egyetem, ahol egy termékeny hónapot töltött 1987-ben, illetve a hírneves varsói Banach Centrum, ahol 1980-1991 között összesen kb. 3 hónapot töltött, többször meghívott előadóként.

Pályafutása során több mint 30 külföldi és kb. 20 hazai nemzetközi konferencián vett részt, ezek közül kb. 15 alkalommal volt meghívott előadó.

4. Balla Katalin, a kolléga és a magánember

Emberi arcát, magánéletét a valódi értékek iránti tisztelete, szerény, csendes magatartás jellemezte. Ez a csendes szerénység azonban soha sem akadályozta meg abban, hogy saját értékei, világképe, az általa helyesnek tartott irányok és célok mellett határozottan és következetesen kiálljon – ebben erős egyéniség volt. Széleskörű szakmai tudására mindig támaszkodhattak kollégái. Önzetlenül segített tudományos vagy fejlesztési munkák során felmerült szakmai kérdésekben.

A magánéletben a családja és barátai sokat jelentettek a számára. Ebben a körben nyitott volt, és a beszélgetések során gondolataival, jó humorával gyakran került a társaság középpontjába. A szakmán kívül sokminden más is érdekelt. Szerette a színházat, a klasszikus zenét: rendszeres színház és operalátogató volt. Szeretett olvasni, a mai magyar irodalom, azon belül Spiró és Eszterházy volt a kedvence. Ameddig egészségi állapota engedte, gyakran utazott és kirándult.

Közvetlen munkatársait, mindazokat, akik ismerték, szerették, mélységesen megrendítette az az egyenlőtlen küzdelem, amelyet az elhatalmasodó kórral vívott.

Emlékét kegyelettel megőrizzük.

Hivatkozások

- [1] BALLA K.: *Kétszeresen fokozatos közelítés*. MTA SZTAKI Közlemények. Vol. 10, (1973), (Angol és orosz nyelvű összefoglalóval), (pp. 25–27.)
- [2] BALLA, K.: Juhász F. és Szepesvári I.: *Parciális differenciálegyenletek task-könyvtár*. MTA SZTAKI. CDC Felhasználói füzetek No. 9, (1975)
- [3] BALLA, K.: *K raschetu jadernyh modelej metodom giperszfericheskikh funkcij*. MTA SZTAKI Közlemények. Vol. 17, (1976), (Angol összefoglalóval), (pp. 27–39.)
- [4] BALLA, K.: *Ob ocenke pogreshnosti zameny usloviya ogranicennosti reshenij dlya sistem linejnyh obyknovennyh differencial'nyh uravnenij s reguljarnoj osobennost'ju*. Zhurnal Vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki. Vol. 18(2), (1978), (pp. 370–378.) Angol fordítás: (Pergamon) USSR Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics: *On the error estimate of the replacement of boundedness condition of solutions for systems of linear ordinary differential equations with regular singularity*.
- [5] BALLA, K.: *On the solution of certain singular boundary value problems*. In: Proceedings of the Third Conference on Numerical Treatment of Ordinary Differential Equations. Berlin. Seminar-bericht No. 46. (ed.: R. März), (1982), (pp. 19–27.)

- [6] BALLA, K.: *On the replacement of the condition of boundedness for certain systems of linear ODE-s with regular singularity*. In: "Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 22. Numerical Methods" Keszthely (1977). (ed.: P. Rózsa) North Holland Publishing Co., Amsterdam - Oxford - New York, (1977), (pp. 121–131.)
- [7] BALLA, K.: *K reseniyu singulyarnyh kraevyh zadach dlya nelinejnyh sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij. Zhurnal Vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki*. Vol. 20(4), (1980), (pp. 909–922.) Angol fordítás: Pergamon, in: USSR Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics: *On the solution of singular boundary value problems for systems of nonlinear ordinary differential equations*.
- [8] BALLA, K.: *On singular boundary value problems for systems of nonlinear ODE-s*. In: "Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 30. Qualitative Theory of Differential Equations" Szeged 1979. North Holland Publishing Co., Amsterdam - Oxford - New York, (1979), (pp. 63–79.)
- [9] BALLA K.: *On singular boundary value problems for second order ODE-s*. MTA SZTAKI Közlemények Vol. 26, (1982), (pp. 9–15.)
- [10] BALLA, K.: *On the solution of a nonlinear field equation*. GAMM-Tagung 1982. ZAMM. 63 Sonderheft. T314–316 (1983)
- [11] BALLA, K.: *Ob ocenke pogresnoszti priblizsennogo resenija nekotoryh szinguljarnyh obyknovennyh differencial'nyh uravnenij. Zhurnal Vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki* Vol. 27(10), (1987), (pp. 1489–1503.) Angol fordítás: Pergamon, in: USSR Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics: *On the error estimate of approximate solution of some singular ordinary differential equations*.
- [12] BALLA, K.: *Error estimation for a class of singular, matrix differential equations of Riccati type*. In: "Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 50. Numerical Methods" Miskolc, 1986. (ed.: D. Greenspan and P. Rózsa) North Holland Publishing Co., Amsterdam - Oxford - New York, (1988), (pp. 239–247.)
- [13] BALLA, K.: *Linear subspaces for linear DAEs of index 1*. *Int. Journal Computers and Mathematics with Applications* Vol. 31(4/5), (1996), (pp. 81–86.)
- [14] BALLA, K.: *Boundary conditions and their transfer for differential-algebraic equations of index 1*. *Int. Journal Computers and Mathematics with Applications* Vol. 31(10), (1996), (pp. 1–5.)
- [15] BALLA, K.: *On asymptotic behavior of solutions to some difference equations*. In: *Advances in Difference Equations*. Proceedings of the 2nd Int. Conf. on Difference Equations, 1995 (eds: S. Elaydi, G. Ladas and I. Györi) Gordon and Breach Publ. (1997), (pp. 67–80.)
- [16] BALLA, K.: *Asymptotic behavior of certain Riccati equations*. In: *Advances in Difference Equations II*. (ed: R.P. Agarwal) Special Issue. *Int. Journal Computers and Mathematics with Applications* Vol. 36(10-12), (1998), (pp. 243–250.)
- [17] BALLA, K.: *Characterization of solutions in the discretization of a parabolic equation on an infinite strip*. *Int. Journal Computers and Mathematics with Applications* Vol. 38(9/10), (1999), (pp. 101–106.)
- [18] ABRAMOV, A. A. – BALLA, K. – KONYUKHOVA, N. B.: *Perenos granichnyh uslovij iz oso-byh toчек dlya sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij*. Soobschenija po vychislitel'noj matematike. Moskva, VC AN SSSR, (1981), (p. 64.)

- [19] ABRAMOV, A. A. – KONYUKHOVA, N. B. – BALLA, K.: *Ustojchivye nachal'nye mnogoobraznaya i singulyarnye kraevye zadachi dlya sistem obyknovennykh differencial'nykh uravnenij*. In: Computational Mathematics. Banach Center Publications. Vol. 13. (ed.: A. Wakulicz) Warsaw, PWN - Polish Scientific Publs. (1984), (pp. 319–351.)
- [20] BALLA, K. AND VICSEK, M.: *On the reduction of Holt's problem to a finite interval*. NUMERISCHE MATHEMATIK Vol. 51, (1987), (pp. 291–302.)
- [21] BALLA, K. – MAYER, J. – DOLESCHALL, S.: *On the computation of multiphase equilibria*. JOURNAL OF ENGINEERING OPTIMIZATION Vol. 15, (1990), (pp. 295–310.)
- [22] BALLA, K. – GUK, O. S. – VICSEK, M.: *On the computation of Bessel function of first kind*. COMPUTING Vol. 50, (1993), (pp. 77–85.)
- [23] ABRAMOV, A. A. – BALLA, K.: *O priblizhennykh reshenijah, osnovannykh na teoremah sravneniya dlya skalyarnykh i matrichnykh uravnenij Riccati na beskonечnom intervale*. ZHURNAL VYCHISLITEL'NOJ MATEMATIKI I MATEMATICHESKOJ FIZIKI Vol. 33(1), (1993), (pp. 35–51.) ANGOL FORDÍTÁS: PERGAMON, IN: JOURNAL OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL PHYSICS: ON APPROXIMATE SOLUTIONS OF SCALAR AND MATRIX RICCATI EQUATIONS BASED ON COMPARISON THEOREMS IN AN INFINITE INTERVAL.
- [24] ABRAMOV, A. A. – ASLANYAN, A. A. – BALLA, K.: *Sravnienie reshenij prognochnykh uravnenij pri perenosе granichnykh uslovij iz beskonечnosti dlya gamiltonovykh linejnykh sistem*. ZHURNAL VYCHISLITEL'NOJ MATEMATIKI I MATEMATICHESKOJ FIZIKI Vol. 35(12), (1995), (pp. 1808–1818.) ANGOL FORDÍTÁS: PERGAMON, COMPUT. MATH. PHYS Vol. 35 (1995), No. 12, (1996), (pp. 1453–1460.) *A comparison of the solutions of the sweep equations for the Hamiltonian linear systems, in the case where the boundary conditions are transferred from infinity.*
- [25] BALLA, K. – BENKŐ, J. M.: *Diamagnetic Coulomb problem at high field strength*. NUMERICAL ANALYSIS. JOURNAL OF PHYSICS A. Vol. 29(21), (1996), (pp. 6747–6764.)
- [26] BALLA, K. – MÄRZ, R.: *Transfer of boundary conditions for DAEs of index 1*. SIAM J. of Numerical Analysis Vol. 33(6), (1996), (pp. 2318–2332.)
- [27] BALLA, K. – LINH, V. H.: *The simultaneous computation of Bessel functions of first and second kind*. INT. JOURNAL COMPUTERS AND MATHEMATICS WITH APPLICATIONS Vol. 31(4/5), (1996), (pp. 87–97.)
- [28] BENKŐ, J. – BALLA, K.: *Transition probabilities for 1H in strong magnetic fields*. IN: "THE HOT UNIVERSE" (EDS.: Koyama, K., Kitamoto, S., Itoh, M.) IAU SYMP. 188. DORDRECHT - BOSTON - LONDON, KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS, (1997), (pp. 275–276.)
- [29] AGARWAL, P. – BALLA, K.: *On Riccati's extended forms*. APPLICABLE ANALYSIS Vol. 69, (1998), (pp. 133–147.)
- [30] BALLA K. – KÉRI G. – NÉMETH E. – RAPCSÁK T. – SÁGI Z. – TÓTH T. – VERRASZTÓ Z.: *A Ráckevei (Soroksári) Duna-ág vízminőségi modellezése többszemponútú döntési módszerek felhasználásával*. SZIGMA XXX. (4), (1999), (pp. 135–159.)
- [31] BALLA, K. – MÄRZ, R.: *Linear differential algebraic equations of index 1 and their adjoint equations*. RESULTS IN MATHEMATICS Vol. 37, (2000), (pp. 13–35.)

- [32] ABRAMOV, A. A. – BALLA, K. – ULYANOVA, V. I. – YUHNÓ L. Sz.: *O nelinejnoj szamosoprjazsennoj szpektralnoj zadacse dlja nekotoryh differencialno-algebraicheskikh uravnenij*. Zhurnal Vycsiszlitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki Vol. 42(7), (2002), (pp. 996–1012. Egyidejű angol nyelvű kiadás: *On a nonlinear selfadjoint spectral problem for some systems of differential algebraic equations*. Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics Vol. 42(7), (2002), (pp. 957–973.)
- [33] BALLA, K. – MÄRZ, R.: *A unified approach to linear differential algebraic equations and their adjoints*. Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen Vol. 21(3), (2002), (pp. 783–802.)
- [34] BALLA, K. – KÉRI, G. – RAPCSÁK T.: *Pollution of the underground water – a computational case study using a transport model*. Journal of Hydroinformatics Vol. 4(4), (2002), (pp. 255–264.)
- [35] BALLA, K. – HORVÁT, Z.: *Approximate solutions to some second order linear recurrences*. In: Proceedings of the conference on applied mathematics and scientific computing. Series: Applied Mathematics and Scientific Computing (eds.: Z. Drmac, V. Hari, L. Sopta, Z. Tutek, K. Veselic), Kluwer Academic Publishers, Boston-Dordrecht-London, (2002), (pp. 191–197.)
- [36] ABRAMOV, A. A. – BALLA, K. – ULYANOVA, V. I. – L. Sz. YUHNÓ: *O nelinejnoj szamosoprjazsennoj szpektralnoj zadacse dlja odnogo klassa differencialno-algebraicheskikh uravnenij*. Zhurnal Vycsiszlitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki Vol. 43(3), (2003), (pp. 410–421.) Egyidejű angol nyelvű kiadás: *On a nonlinear selfadjoint eigenvalue problem for a class of differential algebraic equations*. Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics Vol. 43(3), (2003), (pp. 391–402.)
- [37] ABRAMOV, A. A. – BALLA, K. – ULYANOVA, V. I. – YUHNÓ, L. Sz.: *Nelinejnaja szamosoprjazsennoj szpektralnoj zadacsa dlja differencialno-algebraicheskikh uravnenij*. Differencialnye uravneniya Vol. 39(7), (2003), (pp. 867–878.) Angol nyelvű kiadás: *Differential Equations* Vol. 39(7), (2003), (pp. 913–925.)
- [38] BALLA, K. – KURINA, G. A. – MÄRZ, R.: *O samosoprjazsennykh differencialno-algebraicheskikh uravnenijah v gil-bertovom prostranstve*. In: Trudy matematicheskogo centra imeni N. I. Lobachevskogo. Tom 19. Teorija funkcij, ejo prilozsenija i smeznye voprosy. Izd. Kazanskogo matematicheskogo obscsesztva. Kazany. (2003) (bő kivonat), (pp. 26–28.)
- [39] BALLA, K. – MÄRZ, R.: *Linear boundary value problems for differential algebraic equations*. Mathematical Notes. Vol. 5, (2004), (pp. 3–17.)
- [40] BALLA, K. – LINH, V. H.: *Adjoint pairs of differential-algebraic equations and Hamiltonian systems*. Applied Numerical Mathematics Vol. 53, (2005), (pp. 131–148.)
- [41] BALLA, K. – MÁRTON, S. – RAPCSÁK, T.: *Air pollution modeling in action*. In: Proceedings of the NATO ARW on Advances in Air Pollution Modeling for Environmental Security. NATO Science Series IV - Earth and Environmental Sciences Vol. 54, Springer (2005)
- [42] BALLA, K.: *O priblizhenii granichnogo usloviya v differencial'noj zadache, opredelyayuschej vytyanutye szferoidal'nye funkci*. MTA SZTAKI Working Paper MN/20 p. 17. (1986) (Angol összefoglaló: *On the approximation of boundary condition in the differential problem defining prolate spheroidal functions*)
- [43] BALLA, K.: *On an error estimation in the numerical problem defining the prolate radial spheroidal functions of the third kind*. MTA SZTAKI. Working Paper p. 7. (1989)

- [44] BALLA, K. – BENKŐ, J. M.: *An alternative method for computing dipole strengths*. Working Paper 99-1, Laboratory of Operations Research and Decision Systems. Budapest, MTA SZTAKI p. 11. (1999)
- [45] BALLA, K. – LINH, V. H.: *Adjoint pairs of differential-algebraic equations and Hamiltonian systems*. Working Paper 03-10, Laboratory of Operations Research and Decision Systems. Budapest, MTA SZTAKI p. 24. (2003)
- [46] BALLA, K. – KURINA, G. A. – AND MÄRZ, R.: *Index criteria for differential algebraic equations arising from linear-quadratic optimal control problems*. Preprint Nr. 2003-14. Humboldt-Universität zu Berlin. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II. Institut für Mathematik p. 25. (2003)
- [47] BAHVALOV N. SZ.: *A gépi matematika numerikus módszerei. Analízis, algebra, optimalizálás, közönséges differenciálegyenletek*. Műszaki Könyvkiadó. Budapest, 1977. (Ford.: Balla Katalin és Vicsek Tamásné)
- [48] BRONSTEJN J. N. – SZEMENGYAJEV, K. A.: *Matematikai zsebkönyv mérnökök és mérnök-hallgatók számára*. Műszaki Könyvkiadó. Budapest, 1987. (Ford.: Balla Katalin, Bizám György és Dőry Anna)
- [49] MTA SZTAKI Közlemények 1982/26 különszám
- [50] Numerical methods and Computational Mechanics. Special Issue. Int. Journal Computers and Mathematics with Applications Vol. 42(8/9) (2001) (szerk. Szabó B., Balla K., Galántai A. és Szeidl Gy.)
- [51] Numerical methods and Computational Mechanics. Special Issue. Int. Journal Computers and Mathematics with Applications Vol. 50(7) (2005) (szerk. Szabó B., Balla K., Galántai A. és Szeidl Gy.)

FARAGÓ ISTVÁN

ELTE TTK MATEMATIKAI INTÉZET

1117 BUDAPEST PÁZMÁNY PÉTER SÉTÁNY 1/C

faragois@cs.elte.hu

GALÁNTAI AURÉL

BMF NEUMANN JÁNOS INFORMATIKAI KAR

1034 BUDAPEST, BÉCSI UT 96/B

galantai.aurel@nik.bmf.hu

LIFE AND WORK OF KATALIN BALLA (1947–2005)

FARAGÓ ISTVÁN, GALÁNTAI AURÉL

The paper gives a survey of the scientific, educational and social activity of Katalin Balla.

GEORGE DANTZIG (1914-2005)

PRÉKOPA ANDRÁS

George Bernard Dantzig az operációkutatás egyik úttörője és legendás alakja 2005. május 13-án, rövid betegség után eltávozott az élők sorából. Halálával nagy veszteség érte nem csak a matematikai programozási és a szélesebb körű operációkutatási társadalmat, hanem az egyetemes nemzetközi tudományt is. A lineáris programozás, melynek Dantzig egyik felfedezője és legmarkánsabb alakja volt, a huszadik század egyik legnagyobb tudományos felfedezése, melyek elméletét és módszertanát valamennyi, számszerű adatokkal foglalkozó tudomány folyamatosan alkalmazza.

George Dantzig az USA Oregon államának Portland városában született 1914. november 8-án. A George Bernard nevet apja, Tobias Dantzig, a híres drámaíró, George Bernard Show iránti tiszteletből adta fiának.

Az ifjú Dantzig tehetségesnek mutatkozott a matematikában és a természettudományokban már a középiskolában is. Ennek elvégzése után a University of Maryland (College Park) hallgatója lett, ahol apja abban az időben matematika professzor volt. 1936-ban megszerezte a B.A. fokozatot matematikából és fizikából. Ezt követően két évig a U.S. Bureau of Labor Statistics munkatársa lett, majd 1939-ben a University of California doktorandusza lett. Itt történt vele a sokszor felidézett híres esete Jerry Neymannel, a statisztika híres professzorával.

Egy alkalommal Dantzig olyan későn érkezett az előadásra, hogy Neyman azt már be is fejezte. Neyman, szokása szerint a házi feladatokat felírta a táblára. Amikor Dantzig megérkezett, két feladat leírását találta a táblán, melyeket azután lemásolt és otthon dolgozni kezdett rajtuk. A feladatokat szokatlanul nehéznek találta, de azért megoldotta őket, és átadta a dolgozatot Neymannak, bocsánatot kérve, hogy csak későn tette ezt meg. Neyman íróasztala mindig tele volt papírhalmazokkal, ezek tetejére került Dantzig dolgozata, melyet azután Neyman nem nézett meg két hétig. Ezután azonban, egy vasárnap reggel Neyman sietve felkereste Dantzigot és közölte vele, hogy a dolgozata elé írt egy előszót és elküldi egy folyóirathoz publikálás céljából. A két feladat ugyanis nem házi feladat volt, hanem a statisztika két addig megoldatlan problémája, aznap azokat írta Neyman a táblára.

Jóllehet tanulmányait már korábban befejezte, és a disszertációját is elkészítette, ennek megvédésére és a Ph.D. fokozat megszerzésére csak 1946-ban került sor. A háború alatt Dantzig Washingtonban a Pentagonban dolgozott, a Combat Analysis Branch of Statistical Control vezetőjeként. Ezt követően matematikus

tanácsadó lett az akkoriban létesített Department of the U.S. Air Force (magyarul az Egyesült Államok Légierő Minisztériuma) keretében. Itt ismerkedett meg azokkal a tervezési problémákkal, amelyek a lineáris programozás megalkotásához vezettek. Ebben segítségére volt a Leontief-féle input-output modell, melyet alaposan áttanulmányozott. Ebben az időben, egészen pontosan 1947-ben, alkotta meg a lineáris programozási feladat máig leghatékonyabb megoldási módszerét, a szimplex módszert, mely azután az elmélet szempontjából is alapvető fontosságúvá vált. Születésének ötvenedik évfordulóját megünnepeltük az 1997-ben Lausanneban rendezett nemzetközi matematikai programozási szimpóziumon. Ebben az időben fedezte fel a szállítási probléma megoldási módszerét is, mely a szimplex módszer specializálása az adott feladattípusra. A fentiekén kívül Dantzig felfedezte a dualitás elvet, továbbá a játékelmélet és a lineáris programozás kapcsolatát is. Ezeket az eredményeket 1951-ben publikálta a T.C. Koopmans által szerkesztett *Activity Analysis of Production and Allocation* c. kötetben.

1952-ben Dantzig a RAND Corporation munkatársa lett, mely Californiában, Santa Monicában működött. Ebben az időben a szimplex módszer hatékonyabbá tételén, számítógépes megoldásán, a módszer széleskörű alkalmazásának elterjesztésén dolgozott sokat. Egyidejűleg a keleti parton Neumann János az elektronikus számítógép fejlesztésén dolgozott, melynek egyik legfontosabb célkitűzése a nagyméretű LP feladat megoldására szolgáló hatékony eszköz létrehozása volt. A RAND Corporation-nél alkotta meg a módosított (revised) szimplex módszert, Philip Wolfe-fal közösen a dekompozíciós modellt és algoritmust, indította el a sztochasztikus programozást (egyidejűleg E.M.L. Beale-lel) egy 1955-ben megjelent cikkével és egy 1961-ben A. Madauskyval közösen publikált cikkével, fogalmazta meg az egész értékű LP feladatot, a hátizsák, a legrövidebb út és az utazó ügynök feladatokat.

1960-ban a University of California, Berkeley professzora lett, a mérnöki fakultáson belül az Operations Research Center keretében, melyet ő hozott létre, és ő lett az első elnöke. 1966-ban a közeli Stanford University Operations Research Departmentjében lett „Professor of Operations Research and Computer Science”. 1973-ban C.A. Criley Endowed Chair in Transportation megtisztelő pozíciót is megkapta ugyanott. 1985-ben nyugdíjba ment, a Stanford University professor emeritusa lett.

Legnagyobb alkotását, a szimplex módszert az Institute of Electrical and Electronic Engineers a huszadik század tíz legfontosabb algoritmusai egyikének ismerte el. Elképzelhető, hogy a tíz legfontosabb algoritmus között is a szimplex módszert illeti meg az első hely.

Élete folyamán számtalan elismerésben részesült. Fellow volt az Econometric Society, az Institute of Mathematical Statistics, az Association for the Advancement of Science tudományos társaságokban. Tagja volt a National Academy of Engineering akadémiának, alapító tagja volt az Institute of Management Science tudományos társaságnak és 1966-ban annak elnöki tisztét is betöltötte. Az Operations Research Society of America van Neumann Theory Prize elnevezésű díját ő vehette át elsőként. Ugyancsak elsőként iktatták az IFORS (International Fe-

deration of Operational Research Societies) Operational Research Hall of Fame keretébe. Számos kitüntetése közül a legfontosabb a National Medal of Science, melyet 1975-ben vett át Gerald Fordtól, az Egyesült Államok elnökétől.

Dantzig két ízben járt Magyarországon: 1975-ben és 1976-ban. 1975-ben résztvett a Mátrafüredi Matematikai Programozási Konferencián, ahová felesége, Ann is elkísérte. Ekkoriban Dantzig a Bécs melletti Saxenburbán frissen alapított International Institute for Applied Systems Analysis egyik vezető munkatársa volt, onnan jött át a konferenciára. 1976-ban a Kilencedik Nemzetközi Matematikai Programozási Szimpózium résztvevője és egyik fő előadója volt. Én 1978 nyarán vendégprofesszorként töltöttem nála néhány hetet Stanfordban. Kedves, közvetlen egyénisége lehetővé tette, hogy barátság és együttműködés alakuljon ki közöttünk. Őt egyébként fiatalja, öregje egyaránt röviden George-nak szólíhatta. Fejér Lipót szavai ráillenek: neki volt mire szerénynek lenni.

Az 1914-2005 közötti idő majdnem a teljes huszadik századot átíveli. Az elektronikus számítógép és az operációkutatás felfedezése a múlt század legnagyobb teljesítményei közé tartozik. Sokan, sokféleképpen vélekedtek és vélekednek a számítógép tudományáról (ma Magyarországon inkább az informatika névvel illetik) is és az operációkutatásról. Dantzig mindkettőnek a professzora volt, és megtapasztalhatta, ezek nem illenek egyik hagyományos tudomány keretébe sem. Amerikában inkább a mérnöki fakultások és intézetek karolták fel ezeket, a matematikusok csak sokkal később és kisebb mértékben reagáltak. Dantzig sokat szenvedett attól, hogy az egyetemeken működő sznob matematikusok értetlenül viselkedtek különösen az operációkutatás iránt. Mindamellet Dantzig saját magát matematikusnak tekintette, ilyen értelemben nyilatkozott egy öt évvel ezelőtt vele készített interjújában. Jóllehet egyik megalapítója a sztochasztikus programozásnak, azt követően hosszú ideig a determinisztikus feladatok kötötték le figyelmét. Úgy érezte, hogy a lineáris programozás módszerének elterjesztése fontosabb feladat volt akkoriban, mint a véletlen tényező figyelembe vételén munkálkodni, később azonban változott a véleménye, és kb. húsz év óta a sztochasztikus programozás lelkes propagálója lett. Ezt tükrözi a már említett interjú is.

Halálával a tudomány egy óriása távozott körünkől. Míg tudományát és tanításait elménkben, kedves, mosolygós, szeretetre méltó egyéniségét szívünkben őrizzük.

Nem volt sznob a tudományban, nem volt az a tudománypolitikában és a társadalmi életben sem. Szívesen eleget tett meghívásoknak, érdeklődéssel fordult azok felé is, akik nehéz körülmények között próbáltak lépést tartani a tudomány fejlődésével.

PRÉKOPA ANDRÁS

ELTE

OPERÁCIÓKUTATÁS TANSZÉK

1118 BUDAPEST, PÁZMÁNY PÉTER SÉTÁNY 1/C

prekopa@math.elte.hu

Az Alkalmazott Matematikai Lapok megjelenését támogatja
a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

A kiadásért felelős a BJMT főtíkára
Szedte és tördelte Éliás Mariann

Nyomta az MSZH Nyomda és Kiadó Kft., Budapest
Felelős vezető: Szűcs Ernő

Budapest, 2007
Megjelent 18 (A/5) ív terjedelemben
250 példányban
HU ISSN 0133-3399

ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A kéziratok gépelését olyan formában kérjük, hogy minden gépelt oldal 25, egyenként átlag 50 betűhelyes sort tartalmazzon. A közlésre szánt dolgozatokat e-mailen az `aml@math.elte.hu` címre kérjük elküldeni az ábrákat tartalmazó fájlokkal együtt. Előnyben részesülnek a \TeX -ben elkészített dolgozatok.

A kéziratok szerkezeti felépítésének a következő követelményeket kell kielégíteni. A fejlécnek tartalmaznia kell a dolgozat címét és a szerző teljes nevét. A fejléc után egy, képletet nem tartalmazó, legfeljebb 200 szóból álló kivonatot kell minden esetben megadni. A dolgozatot címmel ellátott szakaszokra kell bontani, és az egyes szakaszokat arab sorszámozással kell ellátni. Az esetleges bevezetésnek mindig az első szakaszt kell alkotnia. Az irodalomjegyzék után, a kézirat befejezésekképpen fel kell tüntetni a szerző teljes nevét és a munkahelye (illetve lakása) pontos címét. A dolgozatban előforduló képleteket szakaszonként újrakezdődően, a képlet előtt két zárójel közé írt kettős számozással kell azonosítani. Természetesen nem szükséges minden képletet számozással ellátni. Az esetleges definíciókat és tételeket (segéd tételeket és lemmákat) ugyancsak szakaszonként újrakezdődő, kettős számozással kell ellátni. Kérjük a szerzőket, hogy ezeket, valamint a tételek bizonyítását a szövegben kellő módon emeljék ki. Minden dolgozathoz csatolni kell egy angol, német francia vagy orosz nyelvű, külön oldalra gépelt összefoglalót.

Mind az ábrákat, mind a lábjegyzeteket a dolgozat szakaszokra bontásától független, folytatólagos arab sorszámozással kell ellátni. Az ábrák elhelyezését a dolgozat megfelelő helyén, széljegyzetként feltüntetett, ábraazonosító sorszámokkal kell megadni. A lábjegyzetekre a dolgozatban belül az azonosító sorszám felső indexkénti használatával lehet hivatkozni.

Az irodalmi hivatkozások formája a következő. Minden hivatkozást fel kell sorolni a dolgozat végén található irodalomjegyzékben, a szerzők, illetve a társszerzők esetén az első szerző neve szerint alfabetikus sorrendben úgy, hogy a cirill betűs szerzők nevét a Mathematical Reviews átírási szabályai szerint latin betűsre kell átírni. A folyóiratban megjelent cikkekre [1], a könyvekre [5], a kötetben megjelent dolgozatokra [4], a disszertációkra [3] és a gépi program leírásokra [2] a következő minta szerint kell hivatkozni:

- [1] FARKAS, J.: *Über die Theorie der einfachen Ungleichungen*. Journal für die reine und angewandte Mathematik 124, (1902) 1–27.
- [2] KÉRI, G.: „DUALSIMP”, rutin a CDC 3300-ás gépekre (Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, CDC 3300 felhasználói ismertetők 2. 1973. május) 19–20.
- [3] PRÉKOPA, A.: *„Sztochasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról”*, doktori értekezés. Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 1970.
- [4] PRABHU, N. U.: *„Recent research on the ruin problem of collective risk theory”*, in: Inventory Control and Water Storage. Ed. A. Prékopa (János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, Amsterdam–London, (1973) 221–228.
- [5] ZOUTENDIJK, G.: *Methods of Feasible Directions* (Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York, 1960).

A dolgozatok szövegében az irodalmi hivatkozás számait szögletes zárójelben kell megadni, mint például [5] vagy [4, 76–78]. A szerzők a dolgozatukról 50 darab ingyenes különlenyomatot kapnak. A dolgozatok után szerzői díjat az Alkalmazott Matematikai Lapok nem fizet.

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Szántai Tamás</i> , Meszéna György méltatása az Egerváry Jenő-emlékplakett átadása alkalmából	1
<i>Fegyverneki Sándor</i> , Újabb statisztikai vizsgálatok az Ornstein-Uhlenbeck-folyamatról	
II. Szimuláció	13
<i>Pintér Miklós</i> , Az inverzlimesz egy játékelméleti alkalmazása	37
<i>Csernoch Mária</i> , Dinamikusan kezelhető statisztikai modellek irodalmi művek szóalakjainak vizsgálatára	57
<i>Achs Ágnes</i> , Datalog alapú Fuzzy tudábázis – bizonytalanságkezelési modell	79
<i>Kolumbán József</i> , <i>Soós Anna</i> , Diszkrét dinamikus rendszerek és káosz	99
<i>Balogh János</i> , <i>Galambos Gábor</i> , Átpakolást használó szemi-on-line ládapakolási algoritmusok	117
<i>Bánhelyi Balázs</i> , Egy késleltetett differenciálegyenlet vizsgálata megbízható számítógépes eljárással	131
<i>Faragó István</i> , <i>Galántai Aurél</i> , Dr. Balla Katalin (1947–2005)	151
<i>Prékopa András</i> , George Dantzig (1914–2005)	159

INDEX

<i>T. Szántai</i> , The work of György Meszéna	1
<i>S. Fegyverneki</i> , New statistical investigations of Ornstein-Uhlenbeck process	
II. Simulation	13
<i>M. Pintér</i> , A game theoretic application of inverse limit	37
<i>M. Csernoch</i> , Dynamic models for the analysis of the introduction of word-types in literary works	57
<i>Á. Achs</i> , Fuzzy knowledge-base with fuzzy Datalog	79
<i>J. Kolumbán</i> , <i>A. Soós</i> , Discrete dynamical systems and chaos	99
<i>J. Balogh</i> , <i>G. Galambos</i> , Algorithms for the on-line bin packing problem with repacking ...	117
<i>B. Bánhelyi</i> , Discussion of a delayed differential equation with verified computing technique	131
<i>I. Faragó</i> , <i>A. Galántai</i> , Life and work of Katalin Balla (1947–2005)	151
<i>A. Prékopa</i> , George Dantzig (1914–2005)	159

Alkalmazott matematikai lapok

2007/2

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

24.

KÖTET

ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

ALAPÍTOTTÁK

KALMÁR LÁSZLÓ, TANDORI KÁROLY, PRÉKOPA ANDRÁS, ARATÓ MÁTYÁS

FŐSZERKESZTŐ

PÁLES ZSOLT

FŐSZERKESZTŐ-HELYETTESEK

BENCZÚR ANDRÁS, SZÁNTAI TAMÁS

FELELŐS SZERKESZTŐ

VIZVÁRI BÉLA

TECHNIKAI SZERKESZTŐ

KOVÁCS GERGELY

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI

Arató Mátyás, Csirik János, Csiszár Imre, Csörgő Sándor, Demetrovics János, Ésik Zoltán,
Farkas Miklós, Frank András, Fritz József, Galántai Aurél, Garay Barna, Gécseg Ferenc,
Gerencsér László, Györfi László, Györi István, Harnos Zsolt, Hatvani László, Heppes Aladár,
Iványi Antal, Járai Antal, Kátai Imre, Katona Gyula, Klafszyk Emil, Komáromi Éva,
Komlósi Sándor, Kovács Margit, Krisztin Tibor, Lovász László, Maros István,
Michaletzky György, Pap Gyula, Prékopa András, Rapcsák Tamás, Recski András,
Rónyai Lajos, Schipp Ferenc, Stoyan Gisbert, Szeidl László, Tusnády Gábor, Varga László

KÜLSŐ TAGOK:

Csendes Tibor, Fazekas Gábor, Fazekas István, Forgó Ferenc, Friedler Ferenc, Fülöp Zoltán,
Imreh Balázs, Kormos János, Kuba Attila, Maksa Gyula, Racskó Péter, Tallos Péter,
Temesi József

24. kötet

Szerkesztőség és kiadóhivatal: 1027 Budapest, Fő u. 68.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását. A szerkesztőbizottság bizonyos időnként lehetővé kívánja tenni, hogy a legjobb cikkek nemzetközi folyóiratok különszámaként angol nyelven is megjelenhessenek.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

A kéziratok a főszerkesztőhöz, vagy a szerkesztőbizottság bármely tagjához beküldhetők. A főszerkesztő címe:

Páles Zsolt, főszerkesztő

1027 Budapest, Fő u. 68.

A folyóirat e-mail címe: aml@math.elte.hu

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára évfolyamonként 1200 forint. Megrendelések a szerkesztőség címén lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

Új monoton jellegű szimplex algoritmusok elemzése megengedettségi feladatok esetén

Bilen Filiz, Csizmadia Zsolt és Illés Tibor

Anstreicher és Terlaky (1994) monoton szimplex algoritmusának megfogalmazzuk egy olyan új variánsát megengedettségi feladatokra, amelynek a lépésszáma egy a szokásostól gyengébb nem degeneráltsági feltevés mellett $m\Delta$ adja meg, ahol Δ a feladat adataiból kiszámítható konstans, m a feltételek száma. A Δ konstans, a feladat leírásához szükséges számítógépes tárigénynek – az adatok bithosszának – egy polinomjával nem mindig korlátozható.

Erősen degenerált feladatok esetén a végességet olyan index választási szabályok segítségével biztosítjuk, melyek nagyfokú flexibilitást tesznek lehetővé a pivot pozíció meghatározásakor, elősegítve a numerikusan nehéz pivot pozíciók elkerülését. Az algoritmusunk végességének a bizonyításához olyan általános keretet használunk – s-monoton pivotálási szabályok tulajdonságait –, amely magában foglalja a szokásos minimál indexes szabály mellett, a "Last In First Out" (LIFO) és a "most-often-selected-variable" (MOSV) szabályt is.

Az s-monoton pivotálási szabályok fogalma jól illeszkedik a lineáris programozási pivot algoritmusok témaköréhez is. A megengedettségi feladatok egy pivot algoritmusára (MBU-szimplex módszer új variánsára) bemutatott, az s-monoton pivot szabály fogalmát használó végesség bizonyítás természetes módon vihető át több lineáris programozási pivot algoritmus végességének az igazolására is.

Az algoritmus lépésszámának elemzése az eredeti monoton szimplex algoritmus és a primál szimplex algoritmus első, illetve második fázisára, továbbá az úgynevezett exterior-point simplex algoritmusra is átvihető nem degeneráltsági feltevés mellett.

Kulcsszavak: megengedettségi feladat, monoton szimplex algoritmusok, degeneráltság, lineáris programozás, index választási szabályok.

Mathematics Subject Classification 2000: 90C20.

1. Bevezetés

A lineáris egyenlőtlenségrendszerek vizsgálata és megoldása, amely a XX. század közepén fejlődésnek indult *lineáris optimalizálás* egyik fontos problémája, ma is több szempontból érdekes kutatási terület.

Tekintsük az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszert, az

$$Ax = b, \quad x \geq 0 \tag{1}$$

megengedettségi feladatot, ahol $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $\text{rang}(A) = m$, ugyanis a lineáris feltételrendszer megoldhatóságát ellenőrizhetjük, illetve a redundáns lineáris feltételeket elhagyhatjuk a

Gauss-Jordán elimináció segítségével. A megengedettségi feladatok legismertebb megoldatlan kérdése az, hogy létezik-e erősen polinomiális pivot algoritmus az (1) probléma megoldására. Mi ennél egy könnyebb kérdésre adunk választ: megmutatjuk, hogy az *Anstreicher-Terlaky monoton simplex algoritmus*nak megfogalmazható egy olyan variánsa az (1) feladatra, amelynek a lépésszámát az $m\Delta$ adja meg, ahol Δ a feladat adataiból kiszámítható konstans. Annak ellenére, hogy a Δ konstans, a feladat leírásához szükséges számítógépes tárigénynek – az adatok bithosszának – egy polinomjával nem mindig korlátozható, és egy speciális *nem degeneráltsági feltevessel* is élnünk kell az elemzésünk során, eredményünk mégis érdekes, hiszen hasonló nem ismert a szakirodalomból. Sőt, azt is mondhatjuk, hogy a lineáris programozási feladatra, a Dantzig-féle simplex algoritmus [7, 8] felfedezése óta sem ismert olyan pivot algoritmus, amelynek a lépésszám becslését az algoritmus elemzéséből nyernénk. A lineáris programozási feladat megoldására definiált pivot algoritmusok nagy többségéről megmutatták, hogy a *Klee-Minty feladaton* [15], vagy valamely azzal nagyon hasonló struktúrájú exponenciális ellenpéldán, egy adott bázisból indulva exponenciálisan sok bázis csere segítségével állítják elő az optimális megoldást. A pivot algoritmusok többségénél, a végesség bizonyításán kívül, ez az egyetlen elméleti jellegű támpont az algoritmus hatékonyságára általános lineáris programozási feladat esetén. Másfelől, gyakorlati feladatok megoldása során nyert tapasztalat ([16], 19. oldal), azt mutatja, hogy a lineáris programozási feladatok megoldásához, a simplex módszerrel $O(m)$ iterációra van szükség, ahol m a feltételek száma. A gyakorlati tapasztalatot számos valószínűségi modellen alapuló vizsgálat támasztja alá, azaz igazolták, hogy számos speciális feladatosztályon és valószínűségi feltételek mellett a simplex algoritmus várható lépésszáma polinomiális. Ezek közül a vizsgálatok közül – a teljesség igénye nélkül – megemlíjtük Borgwardt [4] és Todd [20] műveit. A téma iránt érdeklődők Fukuda és Terlaky [9] cikkéből nyerhetnek további információkat a pivot algoritmusok várható-, átlagos-, illetve legrosszabb lépésszámáról, bőséges irodalmi hivatkozás mellett.

Karmarkar híres cikke [12] után a lineáris optimalizálás kutatás homlokterébe a belsőpontos algoritmusok fejlesztése, új algoritmusok és elemzési módszerek felfedezése került, teljesen háttérbe szorítva a pivot algoritmusok elméleti vizsgálatát, új algoritmusok definiálását.¹ Ritka kivétel Anstreicher és Terlaky [2] *monoton simplex algoritmus*a, amely számos igen jelentős újítást tartalmaz a korábbi simplex (pivot) típusú algoritmusokhoz viszonyítva. Az algoritmus főbb jellemzői: (i) a duál változók megengedettségét monoton módon állítja be; (ii) nem feltétlenül őrzi meg az iterációk során a primál megengedettséget; (iii) két lehetséges pivot pozíciót hasonlít össze; (iv) degenerált feladatok esetén szükséges valamilyen degeneráltság elleni technikát, pl. minimál indexes szabályt, alkalmazni; (v) amennyiben elrontja a primál megengedettséget, akkor az ún. vezér változón való pivotáláskor, a primál megengedettség visszaáll.

¹A pivot algoritmusok kifejlesztésének hőskorát lezáró Klee és Minty [15] dolgozata után megjelent pivot algoritmusokat foglalták össze Terlaky és Zhang [19].

Dolgozatunkban Anstreicher és Terlaky által megfogalmazott monoton szimplex módszer [2] alapötletét felhasználva definiáltuk algoritmusunkat megengedettségi feladat megoldására. Algoritmusunk rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy ha valamelyik változó a számítási eljárás során megengedetté vált, akkor ezt a megengedettséget mindvégig megőrzi, tehát a feladat megoldása – a változók megengedettségének az elérése – monoton módon történik. Algoritmusunk duál változata analóg módon definiálható.

Pivot pozíció választásunk eltér a megengedettségi (lineáris programozási) feladatoknál megszokottaktól. Részletesebben ezzel a 2. fejezetben foglalkozunk.

Algoritmusunkról – egy nem degeneráltsági feltétel mellett – kimutatjuk, hogy $m\Delta$ iterációra van szükségünk a feladat megoldásához. Tekintettel arra, hogy a nem degeneráltsági feltétel teljesülését nem lehet a priori bizonyítani, így a 4. fejezetben egy általános módszertan segítségével számos flexibilis index választási szabályról bizonyítjuk, hogy algoritmusunk végességét biztosítja. Ezen index választási szabályok tartalmazzák a most-often-selected-variable, LIFO és a szokásos minimál index választási szabályt is. A flexibilis index választási (pl. LIFO) szabályok számos esetben lehetővé teszik numerikusan instabil pivot pozíciók elkerülését.

Algoritmusunk geometriai tulajdonságait az alábbiakban foglaljuk össze. Hasonlóan a criss-cross módszerekhez, az algoritmus a megengedettségi feladat feltételei által alkotott metszésrendszer szomszédos metszéspontjain – nem megengedett bázisokon – halad keresztül. Ha valamely iteráció során az aktuális bázismegoldás egy adott feltétel által meghatározott hipersík megengedett oldalára került, akkor a további iterációkban előállított bázismegoldások sem fognak ezen feltétel nem megengedett oldalára kerülni.

Dolgozatunk 2. fejezetében új pivot pozíció választási szabályt és lokális degeneráltsági fogalmat vezetünk be. A 3. fejezetben megfogalmazzuk az MBU típusú primál szimplex algoritmusunkat, és igazoljuk néhány tulajdonságát. Lokálisan nem erősen degenerált pivot sorozatok esetén kiszámítjuk az algoritmus lépésszámának egy felső korlátját. A 4. fejezetben degeneráltsági megkötés nélkül igazoljuk az MBU típusú szimplex algoritmus végességét.

1.1. Jelölések

Dolgozatunkban a következő jelölésrendszert használjuk. A skalárokat és indexeket kis latin betűk, a vektorokat vastag kis latin betűk, a mátrixokat nagy latin betűk, míg az indexhalmazokat kalligrafikus nagy betűk jelölik.

Egy $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{I} := \{1, 2, \dots, n\}$ indexhalmaz és $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén jelölje $\mathbf{v}_{\mathcal{G}}$ a \mathbf{v} \mathcal{G} által indexelt részvektorát, vagyis $(\mathbf{v}_{\mathcal{G}})_i := v_i$, $i \in \mathcal{G}$. Egy $T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix, illetve az $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{J} := \{1, \dots, m\}$ és $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{I}$ indexhalmazok esetén jelölje $T_{\mathcal{F}\mathcal{G}}$ azt a rész mátrixot, amelynek sorai \mathcal{F} , illetve oszlopai a \mathcal{G} indexekkel vannak indexelve.

Legyen $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a teljes sorrangú A mátrix egy nemszinguláris négyzetes rész mátrixa, illetve N az A mátrix többi – maradék – oszlopából álló mátrix. Ekkor a B mátrixot a feladat egy bázisának nevezzük, és az $\mathcal{I}_B \subset \mathcal{I}$, illetve $\mathcal{I}_N \subset \mathcal{I}$ indexhalmazokkal a bázisbeli és bázison kívüli változók halmazát

jelöljük. Ha szükséges hangsúlyozni, hogy az indexhalmazok a k . iterációhoz tartoznak, akkor az \mathcal{I}_{B_k} és \mathcal{I}_{N_k} jelöléssel élünk. Ismeretes, hogy ekkor a bázishoz tartozó megoldást a $\bar{\mathbf{b}} := \bar{\mathbf{x}}_{\mathcal{I}_B} := B^{-1}\mathbf{b}$ formulával lehet meghatározni, és $T = B^{-1}N \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ adja meg a bázishoz tartozó rövid pivot táblát. Definíció szerint $\bar{\mathbf{x}}_{\mathcal{I}_N} := \mathbf{0}$.

Egy rögzített B bázis esetén a következő partíciókat fogjuk használni:

$$\mathcal{I}_B = \mathcal{I}_B^+ \cup \mathcal{I}_B^0 \cup \mathcal{I}_B^-,$$

ahol

$$\mathcal{I}_B^+ = \{i \in \mathcal{I}_B : \bar{x}_i > 0\}, \quad \mathcal{I}_B^0 = \{i \in \mathcal{I}_B : \bar{x}_i = 0\} \quad \text{és} \quad \mathcal{I}_B^- = \{i \in \mathcal{I}_B : \bar{x}_i < 0\}.$$

Időnként, ha csupán a megengedettséget szeretnénk hangsúlyozni bizonyos bázisváltozóknak, akkor az $\mathcal{I}_B^\oplus = \mathcal{I}_B^+ \cup \mathcal{I}_B^0$ jelölést használjuk.

A partíciónak megfelelő bázistáblát az 1. ábra mutatja.

i	—	—	}	\mathcal{I}_B^-
		⋮		
		—		
j		0	}	\mathcal{I}_B^0
		⋮		
		0		
k	+	+	}	\mathcal{I}_B^+
		⋮		
		+		

1. ábra. A bázis partícionálása.

2. Pivot pozíció választása: néhány új fogalom

A legtöbb szakirodalomból ismert pivot módszer primál megengedett sorban csak pozitív elemen végez báziscserét (pl. primál szimplex), illetve primál nem megengedett sor esetén negatív elemen végez báziscserét (pl. duál szimplex) esetleg a kétféle stratégiát ötvözi (pl. criss-cross módszer). Ezt felismerve Fukuda és Terlaky [9, 10], bevezették az úgynevezett elfogadható báziscsere fogalmát. A mi algoritmusunk ennél általánosabb báziscserét is fog végezni. A pozitív értékű változó sorában pozitív elemen végzett báziscsere felfogható az elfogadható báziscsere duál oldali pivotjának megengedettségi feladatokra vonatkozó megfelelőjeként. A degeneráltaság kezelésekor a degenerált sorokban (vagyis ahol a jobboldal nulla) pozitív, illetve negatív elemen is végezhetünk báziscserét.

2.1. Definíció. Egy adott B bázis és T pivot tábla esetén a t_{ij} elemet *általánosított elfogadható* pivot elemnek nevezzük, ha

1. $i \in \mathcal{I}_B^-$ és $t_{ij} < 0$, vagy
2. $i \in \mathcal{I}_B^+$ és $t_{ij} > 0$, vagy
3. $i \in \mathcal{I}_B^0$ és $t_{ij} \neq 0$.

Algoritmusunkban és a későbbiekben bevezetett részfeladatok megoldásakor általánosított elfogadható báziscserét használunk. Az algoritmus megfogalmazásához szükségünk lesz a degeneráltság fogalmának a finomítására. Vezessük be $s \in \mathcal{I}_N$ esetén a

$$\mathcal{K}_s = \{i \in \mathcal{I}_B^0 : t_{is} > 0\}$$

jelölést.

2.2. Definíció. Egy B bázist *nem degeneráltnak* nevezünk, ha \bar{x}_B egyik komponense sem nulla. A B bázis *degenerált*, ha az \bar{x}_B bázismegoldásnak van nulla komponense.

A degeneráltság jelensége az aktuális bázistól is függ oly módon, hogy az adott bázismegoldás előállítható a dimenziójánál kevesebb bázisbeli elem kombinációjaként. A későbbiekben a degeneráltság két fajtáját fogjuk megkülönböztetni.

2.3. Definíció. A B degenerált bázist *lokálisan gyengén degeneráltnak* nevezük az $s \in \mathcal{I}_N$ indexre vonatkozóan, ha $\mathcal{K}_s = \emptyset$, illetve *lokálisan erősen degeneráltnak* nevezük az s indexre vonatkozóan, ha $\mathcal{K}_s \neq \emptyset$.

Tegyük fel hogy egy adott B bázis esetén eldöntöttük, hogy a bázistábla s . oszlopában kívánunk nem degenerált sorban általánosított elfogadható báziscserét végezni oly módon, hogy a degenerált változók ne váljanak nem megengedetté. Figyeljük meg, hogy ez pontosan akkor lehetséges, ha $\mathcal{K}_s = \emptyset$. Egy ilyen, az s indexre nézve lokálisan gyengén degenerált táblát mutat a 2. ábra.

	s		
		...	$\left. \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \mathcal{I}_B^-$
		...	
		...	
		0	$\left. \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \mathcal{I}_B^0$
		...	
		0	
		+	$\left. \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \mathcal{I}_B^+$
		...	
		+	

2. ábra. Lokálisan gyengén degenerált pivot tábla.

2.4. Definíció. Legyen adott egy B bázis és egy $r \in \mathcal{I}_B^-$ index. A megfelelő bázistábla egy t_{ij} elemén végzett báziscserét x_r *növelőnek* nevezzük, ha

1. a t_{ij} elem általánosított elfogadható pivot elem,
2. $\mathcal{I}_B^\oplus \subseteq \mathcal{I}_{B'}^\oplus$, és
3. $\hat{x}_r > \bar{x}_r$ teljesül,

ahol \bar{x} az aktuális megoldást, B' az új bázist és \hat{x} az új bázismegoldást jelöli.

Az x_r növelő báziscserére mutatunk egy egyszerű példát.

2.1. Példa.

	x_4	x_5	
x_1	0	-1	0
x_2	1	-1	1
x_3	-1	0	-2

A tábla egyetlen nem megengedett változójának a sorában egy negatív elem található, így a vezérváltozó az x_3 , és az x_4 oszlopában végzünk báziscserét. A vezérváltozó sorában a báziscsere nem lenne növelő, mert az x_2 változó nem megengedetté válna, ellentmondva a definíció 2. feltételének. Mivel a tábla gyengén degenerált ($\mathcal{K}_4 = \emptyset$), így van x_3 növelő báziscsere, azaz az x_2 távozik és az x_4 belép a bázisba.

	x_2	x_5	
x_1	0	-1	0
x_4	1	-1	1
x_3	1	-1	-1

Célunk x_r növelő báziscseréket végrehajtó algoritmust megfogalmazni. Ismereiteink szerint a szakirodalomból egyetlen x_r növelő báziscseréket végző algoritmus ismert, Anstreicher és Terlaky [2] általános, primál, illetve duál megengedett megoldásból induló lineáris programozási feladatokra megfogalmazott primál, illetve duál oldali algoritmus.

Sajnos léteznek olyan bázistáblák, melyeken nincs x_r növelő báziscsere, ahogyan azt a 3. ábra példája is mutatja. A probléma egy megengedett megoldása az $x_1 = x_2 = 0, x_3 = x_4 = 1$, mégis az egyetlen negatív értékű sorhoz növelő báziscsere.

	x_3	x_4	
x_1	-1	0	-1
x_2	1	-1	0

3. ábra. Lokálisan erősen degenerált tábla, melyen nincs x_r növelő báziscsere, ahol $r = 1$.

3. Az MBU szimplex típusú algoritmus megengedettségi feladatokra

Ebben a fejezetben megfogalmazzuk az (1) primál megengedettségi feladat megoldására szolgáló MBU szimplex típusú algoritmusunkat, mely Anstreicher és Terlaky [2] algoritmusához hasonló tulajdonságokkal rendelkezik. Ez utóbbi algoritmust általános lineáris programozási feladatra fogalmazták meg, és fő jellemzője, hogy duál megengedett bázisból indulva monoton módon állítja be a primál változók megengedettségét, miközben a duál megengedettség elromolhat, azonban a kiválasztott primál változó megengedettségének elérésekor az aktuális megoldás ismét duál megengedetté válik.

3.1. Algoritmus. MBU szimplex algoritmus megengedettségi feladatokra

Begin

Bemenő adatok: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$,

$B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ az A reguláris részmátrixa.

$T := B^{-1}A$, $\bar{b} := B^{-1}b$, $\mathcal{I}_B^- := \{i \in \mathcal{J} \mid \bar{b}_i < 0\}$.

While $(\mathcal{I}_B^- \neq \emptyset)$ **do**

Legyen $r \in \mathcal{I}_B^-$ tetszőleges (vezérváltozó), $rDone := false$.

While $(rDone = false)$ **do**

$\mathcal{J}_r^- := \{j \in \mathcal{I}_N \mid t_{rj} < 0\}$.

If $(\mathcal{J}_r^- = \emptyset)$ **then**

nincs megengedett megoldás, **Return**

Endif

Legyen $s \in \mathcal{J}_r^-$ tetszőleges, $\mathcal{K}_s := \{i \in \mathcal{I}_B^0 \mid t_{is} > 0\}$.

If $(\mathcal{K}_s \neq \emptyset)$ **then**

$(T, l) = DegEljárás(T, \mathcal{I}_B^0, r)$.

If $(l \in \mathcal{I}_N)$ **then**

$s := l$.

else

nincs megengedett megoldás, **Return**

Endif

Endif

$\Theta_1 := \frac{\bar{b}_r}{t_{rs}}$, $\Theta_2 := \min \left\{ \frac{\bar{b}_k}{t_{ks}} \mid k \in \mathcal{I}_B^\oplus, t_{ks} > 0 \right\}$.

If $(\Theta_1 \leq \Theta_2)$ **then**

pivotálás a t_{rs} elemen, $rDone = true$.

else

$q := \arg_k \min \left\{ \frac{\bar{b}_k}{t_{ks}} \mid k \in \mathcal{I}_B^+, t_{ks} > 0 \right\}$, pivotálás a t_{qs} elemen.

Endif

Endwhile

$\mathcal{I}_B^- := \{i \mid \bar{b}_i < 0\}$.

Endwhile

\bar{x} megengedett megoldás.

End

Algoritmusunk bizonyos értelemben az Anstreicher és Terlaky duál MBU-szimplex algoritmusához áll közel, hiszen esetünkben is a primál megengedett változók száma növekszik monoton módon.

Algoritmusunk a monotonitás elérése érdekében a következő szemléletes képet követi. Kiválaszt egy, az adott megoldásban nem megengedett változót, melyet az elkövetkező iterációk során megengedetté kíván tenni. Mindaddig, míg ezen változó megengedetté nem válik, ezt a változót *vezérváltozónak* fogjuk nevezni. Az x_r vezérváltozó megengedettséget monoton módon javítjuk x_r növelő báziscserék segítségével. Látni fogjuk, ha az algoritmus csupán nem degenerált, vagy lokálisan gyengén degenerált bázistáblákon halad, akkor ez mindig megtehető.

Az (1) feladatra megfogalmazott algoritmusunk pseudo kódját a 3.1. Algoritmus, míg annak folyamatábráját az 4. ábra foglalja össze. Az algoritmus lokálisan erősen degenerált bázisok esetén kénytelen degeneráltság elleni eljárást alkalmazni. A degeneráltság elleni eljárást a 4. fejezetben tárgyaljuk, az algoritmusban egyelőre csak *DegEljárás*ként hivatkozunk rá.

Az x_r növelő báziscsere megtalálásának érdekében a báziscserére kiválasztott oszlopban két hányadosesztet kell végezni, melyek értékének viszonyából állapítható meg, hogy végezhető-e báziscsere a vezérváltozó sorában, vagy általánosabb x_r növelő báziscserére van-e szükség.

Az algoritmus leírásában a két hányadosesztet értékét Θ_1 -gyel és Θ_2 -vel jelöltük (3.1. Algoritmus). A definíciójukból könnyen látható, hogy $\Theta_1 > 0$ és $\Theta_2 \geq 0$, továbbá ha a megfelelő bázis lokálisan nem erősen degenerált, akkor $\Theta_2 > 0$. Az algoritmus belső ciklusának célja a vezérváltozó megengedettségeinek előállítása.

Megmutatjuk, hogy az algoritmus kizárólag x_r növelő báziscseréket végez, ha az adott B bázis a kiválasztott nem bázis változóra nézve nem erősen degenerált. A következő állításban azt az esetet vizsgáljuk, amikor éppen a vezérváltozó távozik a bázisból.

3.1. ÁLLÍTÁS. Az MBU simplex algoritmus egy adott lépésében az aktuális B bázis esetén legyen $r \in \mathcal{I}_B^-$ és $q \in \mathcal{I}_B^\oplus, t_{qs} > 0$. Tegyük fel, hogy

$$\frac{\bar{b}_q}{t_{qs}} = \Theta_2 \geq \Theta_1 = \frac{\bar{b}_r}{t_{rs}} > 0,$$

ahol $\bar{b}_r < 0$, $t_{rs} < 0$, $\bar{b}_q \geq 0$ és $t_{qs} > 0$. Ekkor az algoritmus a t_{rs} elemen végez báziscserét. Jelölje a báziscsere utáni új bázist B' .

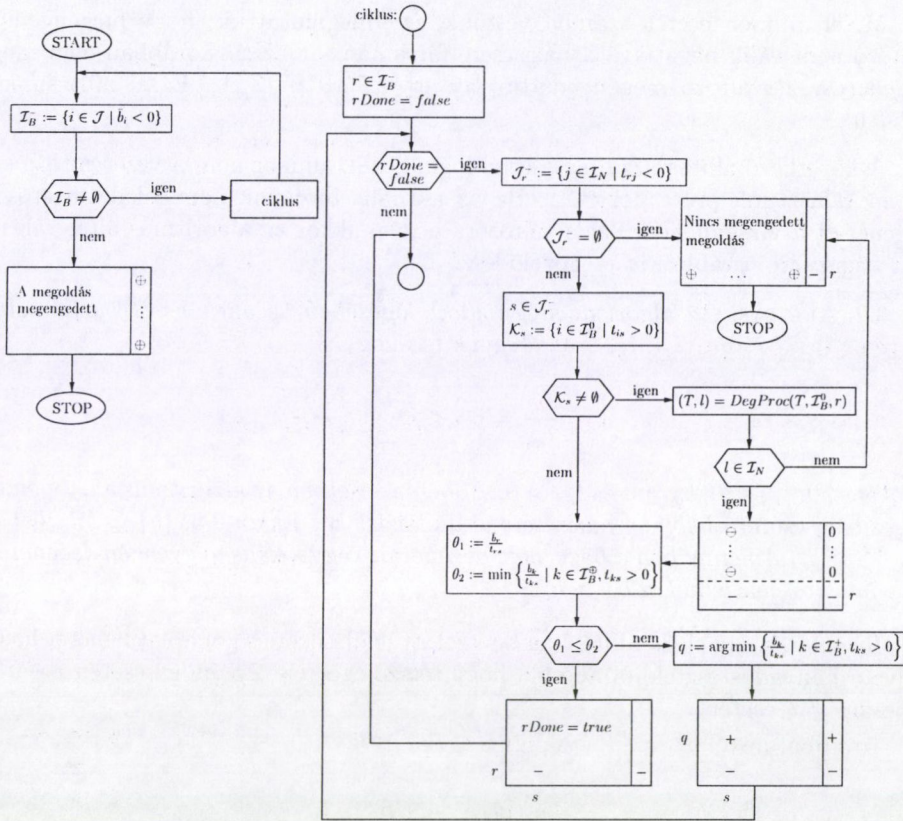
Ekkor

$$\mathcal{I}_B^\oplus \cup \{s\} \subseteq \mathcal{I}_{B'}^\oplus,$$

teljesül, és így

$$|\mathcal{I}_{B'}^\oplus| > |\mathcal{I}_B^\oplus|.$$

Bizonyítás. A t_{rs} elemen végzett báziscsere során az x_r változó távozik a bázisból, és így új értéke nulla, míg az x_s változó belép a bázisba. Jelölje az új bázishoz tartozó megoldást – és így az új bázistábla jobboldalát – \mathbf{b}^+ . Bizonyításunk esztétválasztáson alapszik.



4. ábra. Az MBU simplex algoritmus folyamatábrája megengedettségi feladatokra.

- Az s index esetén a megfelelő jobboldal $b_s^+ = \frac{\bar{b}_r}{t_{rs}} = \Theta_1 > 0$, vagyis a vezérváltozó helyére belépő változó megengedett lesz.
- Az $i \in I_B^+, i \neq s$ esetén az új jobboldal $b_i^+ = \bar{b}_i - \frac{t_{is}\bar{b}_r}{t_{rs}}$ képlettel számolható ki. Ha $t_{is} \leq 0$, akkor felhasználva, hogy $\bar{b}_i > 0$, $\bar{b}_r < 0$ és $t_{rs} < 0$, adódik, hogy $b_i^+ > 0$, mivel egy nemnegatív számot adunk a már amúgy is pozitív \bar{b}_i jobboldalhoz. Egyébként, ha $t_{is} > 0$, akkor a $b_i^+ = t_{is} \left(\frac{\bar{b}_i}{t_{is}} - \frac{\bar{b}_r}{t_{rs}} \right)$ átalakítás alapján, mivel a vezérváltozó sorában történik a báziscsere, ezért a $\frac{\bar{b}_i}{t_{is}} \geq \Theta_2 \geq \Theta_1 = \frac{\bar{b}_r}{t_{rs}} > 0$ feltétel alapján $b_i^+ \geq 0$.
- Legyen $i \in I_B^0$. Az új jobboldal értéke $b_i^+ = \bar{b}_i - \frac{t_{is}\bar{b}_r}{t_{rs}}$. Mivel $\frac{\bar{b}_q}{t_{qs}} = \Theta_2 > 0$, ezért a $q \notin I_B^0$, vagyis a $\mathcal{K}_s = \emptyset$, és így $t_{is} \leq 0$. Figyelembe véve a $\bar{b}_i = 0$ feltételt is, a $b_i^+ = -\frac{t_{is}\bar{b}_r}{t_{rs}} = -t_{is} \Theta_1 \geq 0$ teljesül.

Mivel minden esetet számba vettünk, így megmutattuk, hogy megengedett változó nem válik negatívvá a báziscsere folyamán, de az x_r korábban nem megengedett vezérváltozó megengedetté vált, így $|\mathcal{I}_{B'}^\oplus| > |\mathcal{I}_B^\oplus|$. Ezzel állításunkat beláttuk. \square

A következő állítás azzal az esettel foglalkozik, amikor nem a vezérváltozó sorában választunk pivot pozíciót. Ha az aktuális bázisunk nem lokálisan erősen degenerált a vizsgált nem bázis változóra nézve, akkor az algoritmus által választott báziscsere továbbra is x_r növelő lesz.

3.2. ÁLLÍTÁS. Az algoritmus egy adott lépésében az aktuális B bázis esetén legyen $r \in \mathcal{I}_B^-$ és $q \in \mathcal{I}_B^\oplus$, $t_{qs} > 0$. Tegyük fel, hogy

$$0 \leq \frac{\bar{b}_q}{t_{qs}} = \Theta_2 < \Theta_1 = \frac{\bar{b}_r}{t_{rs}},$$

ahol $\bar{b}_r < 0$, $t_{rs} < 0$, $\bar{b}_q \geq 0$ és $t_{qs} > 0$. Ebben az esetben az algoritmus a t_{qs} elemen végez báziscserét. Jelölje a báziscsere utáni bázist B' . Ekkor $\mathcal{I}_B^\oplus \setminus \{q\} \subseteq \mathcal{I}_{B'}^\oplus \setminus \{s\}$ és $0 > b_r^+ \geq \bar{b}_r$. Amennyiben a bázis nem degenerált vagy lokálisan gyengén degenerált az s indexre nézve, akkor $b_r^+ > \bar{b}_r$.

Bizonyítás. Az előző állításban bevezetett jelöléseket és gondolatmenetet használva a hányadosesetekből adódik, hogy tetszőleges $i \in \mathcal{I}_B^\oplus$ index esetén $i \in \mathcal{I}_{B'}^\oplus$, teljesül $i \neq q$ esetén.

Továbbá, mivel $b_s^+ = \frac{\bar{b}_q}{t_{qs}} \geq 0$, így $s \in \mathcal{I}_{B'}^\oplus$, és így

$$\mathcal{I}_B^\oplus \setminus \{q\} \subseteq \mathcal{I}_{B'}^\oplus \setminus \{s\},$$

ami biztosítja, hogy egy már megengedett változó ne váljon negatívvá. A vezérváltozó megváltozását $b_r^+ = \bar{b}_r - \frac{t_{rs}\bar{b}_q}{t_{qs}}$ formula adja meg, ahol $-\frac{t_{rs}\bar{b}_q}{t_{qs}} \geq 0$, hiszen $t_{rs} < 0$, $t_{qs} > 0$ és $\bar{b}_q \geq 0$. A $\Theta_2 < \Theta_1$ feltevés miatt $0 \geq \frac{t_{rs}\bar{b}_q}{t_{qs}} > \bar{b}_r$ adódik, és így

$$0 > b_r^+ = \bar{b}_r - \frac{t_{rs}\bar{b}_q}{t_{qs}}.$$

Amennyiben a bázis nem degenerált, vagy lokálisan gyengén degenerált az $s \in \mathcal{I}_N$ indexre, akkor definíció szerint $\Theta_2 > 0$ teljesül, tehát $\frac{\bar{b}_q}{t_{qs}} > 0$ és $-t_{rs}\frac{\bar{b}_q}{t_{qs}} > 0$, így

$$0 > b_r^+ = \bar{b}_r - t_{rs}\frac{\bar{b}_q}{t_{qs}} > \bar{b}_r$$

teljesül. Ezzel állításunkat beláttuk. \square

Geometriailag a 3.2. Állítást úgy lehet értelmezni, hogy a báziscsere során a vezérváltozó által kijelölt feltételhez közelebbi megoldást kapunk.

A 3.1. és 3.2. Állításokat összefoglalva kapjuk az alábbi következményt.

3.1. KÖVETKEZMÉNY. Az MBU szimplex algoritmus megengedettségi feladatokra, ha lokálisan nem erősen degenerált bázisokon halad, akkor minden lépésben x_r növelő báziscserét hajt végre a vezérváltozóra nézve, és így véges.

Bizonyítás. Mivel a lehetséges bázisok száma véges, így elég megmutatni hogy az algoritmus nem ciklizál, vagyis ugyanaz a bázis nem fordulhat elő kétszer. Mivel feltettük, hogy a bázisok, amelyeken az algoritmus végighalad nem lehetnek lokálisan erősen degeneráltak, ezért a 3.1. és 3.2. Állításokból következik, hogy az algoritmus minden lépésben x_r növelő báziscserét hajt végre a vezérváltozóra nézve, így minden lépésben vagy egy újabb változó válik megengedetté, vagy pedig a vezérváltozó értéke növekszik, így kétszer ugyanaz a bázismegoldás nem fordulhat elő. \square

A 2.1. Példa folytatásaként bemutatunk egy a vezérváltozó sorában történő pivotálást is. Ezzel az MBU szimplex algoritmusunk mindkét nem degenerált pivot fajtájára (x_r növelő pivotálásra) példát adunk.

3.1. Példa.

	x_2	x_5	
x_1	0	-1	0
x_4	1	-1	1
x_3	1	-1	-1

A tábla továbbra is degenerált, a báziscsere oszlopa egyértelmű, hiszen az x_3 vezérváltozó sorában csak egy negatív elem van. A gyengén degeneráltság miatt és a hányados teszt értelmében, a vezérváltozó sorában elvégezhető a báziscsere.

	x_2	x_3	
x_1	-1	-1	1
x_4	0	-1	2
x_5	-1	-1	1

A 3.1. és 3.2. Állítások és a 3.1. Következmény az MBU szimplex algoritmus pivotálási szabályát jellemző eredmények. Anstreicher és Terlaky [2] cikkükben lineáris programozási feladatra definiált primál algoritmusukra hasonló eredményeket igazoltak.

A következő fejezetben a vezérváltozó értékének növekedésére alsó korlátot adunk, és így az algoritmus lépésszámára felső korlátot állítunk elő.

Legjobb tudomásunk szerint a szakirodalomból eddig még nem ismert olyan általános feladatokra kifejlesztett pivot algoritmus, amelynek a lépésszámára az algoritmus elemzéséből tudtak korlátot kiszámítani. A pivot algoritmusokat az jellemzi, hogy lépésszámukra általában legrosszabb eset elemzés ismert csak, vagy pedig sejtik, hogy exponenciális lépésszámú példa adható rájuk.

Az itt bemutatott módszert hasonló módon lehet elemezni, és hasonló lépésszám becslést lehet adni az MBU algoritmus lineáris programozási megfelelőjére, illetve a szimplex algoritmus megengedettségi feladatok megoldására szolgáló első

fázisára is. Míg a primál MBU algoritmus geometriai interpretációja, hogy egy kiszemelt sérülő feltételhez közeledünk, a primál szimplex algoritmus első fázisa a nem megengedettségek összegét próbálja csökkenteni.

3.1. Lépésszám becslés: lokálisan nem erősen degenerált pivot sorozatok esetén

Ebben a fejezetben feltesszük, hogy algoritmusunk lokálisan nem erősen degenerált bázisokon halad. A degenerált esettel a 4. fejezetben foglalkozunk.

A rövid pivot tábla és a bázismegoldás definíciója alapján a rövid pivot tábla egy oszlopára és az aktuális bázismegoldásra teljesül, hogy $t_s = B^{-1}a_s$ és $\bar{b} = B^{-1}b$, vagyis a t_s és \bar{b} vektorok a $Bu = a_s$, illetve $Bv = b$ lineáris egyenletrendszerek egyértelmű megoldásai. A Cramer szabály alapján tetszőleges $i \in I_B$ index esetén

$$t_{is} = \frac{\det(B_{is})}{\det(B)} \quad \text{és} \quad \bar{b}_i = \frac{\det(B_i)}{\det(B)},$$

ahol a $B_{is} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mátrixot úgy kapjuk, hogy a B bázis i . oszlopát kicseréljük az a_s vektorra, és hasonlóan, a B_i mátrix a B i . oszlopának b vektorra cserélésével keletkezik. Egy olyan x_r növelő pivot során, mely nem a vezérváltozó sorában történik, a 3.2. Állításban bizonyítottak alapján

$$b_r^+ = \bar{b}_r - \frac{t_{rs}\bar{b}_q}{t_{qs}} = \frac{\det(B_r)}{\det(B)} - \frac{\frac{\det(B_{rs})}{\det(B)} \frac{\det(B_q)}{\det(B)}}{\frac{\det(B_{qs})}{\det(B)}} = \frac{\det(B_r)}{\det(B)} - \frac{\det(B_{rs}) \det(B_q)}{\det(B_{qs}) \det(B)},$$

ahol

$$-\frac{\det(B_{rs})}{\det(B_{qs})} \frac{\det(B_q)}{\det(B)} > 0$$

teljesül a bázis lokálisan nem erősen degenerált volta miatt. Jelölje

$$\Delta_A := \min \left\{ -\frac{\det(B_{rs}) \det(B_q)}{\det(B_{qs}) \det(B)} : \begin{array}{l} B \text{ az } A \text{ reguláris részmátrixa és} \\ \frac{\det(B_{rs})}{\det(B)} < 0, \frac{\det(B_q)}{\det(B)} > 0, \frac{\det(B_{qs})}{\det(B)} > 0 \end{array} \right\}$$

a vezérváltozó értékének minimális növekedését. Felhasználva, hogy csak lokálisan nem erősen degenerált bázisokat vizsgálunk, adódik, hogy $\Delta_A > 0$ véges, és

$$b_r^+ = \bar{b}_r - \frac{t_{rs}\bar{b}_q}{t_{qs}} = \frac{\det(B_r)}{\det(B)} - \frac{\det(B_{rs}) \det(B_q)}{\det(B_{qs}) \det(B)} \geq \frac{\det(B_r)}{\det(B)} + \Delta_A.$$

Összefoglalva, az x_r növelő pivot vagy megengedetté teszi a vezérváltozót, vagy annak értékét legalább Δ_A -val növeli. Habár a végesség bizonyításához ez már elegendő lenne, a lépésszám felső becsléséhez meg kell becsülnünk a vezérváltozók lehetséges legnagyobb abszolút értékét. Legyen

$$\Delta_{\max} := \max \left\{ -\frac{\det(B_r)}{\det(B)} : \begin{array}{l} \text{sgn}(\det(B_r)) = -\text{sgn}(\det(B)), \text{ és} \\ B \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ az } A \text{ egy reguláris részmátrixa} \end{array} \right\}$$

a lehetséges legnagyobb abszolútértékű jobboldal a Cramer-szabály alapján. Ha a feladat nem triviális, és van olyan bázis, mely esetén van negatív jobboldal, akkor Δ_{\max} pozitív és véges. Legyen $\Delta \in \mathbb{Z}$ és $\Delta := \left\lceil \frac{\Delta_{\max}}{\Delta_A} \right\rceil$.

A következő állításban felső korlátot adunk az algoritmus belső ciklusának maximális hosszára, vagyis azon iterációk számára, melyek során a vezérváltozó értéke növekszik ugyan, de nem válik megengedetté.

3.3. ÁLLÍTÁS. *Tegyük fel, hogy az algoritmus lokálisan nem erősen degenerált bázisokon halad végig. Legyen $r \in I_B^-$ az aktuális vezérváltozó indexe. Ekkor az algoritmus legfeljebb Δ báziscserét végez mielőtt a vezérváltozó megengedetté válik, vagy legfeljebb Δ báziscsere alatt kimutatja, hogy a megengedettségi feladatnak nincs megoldása.*

Bizonyítás. A definíciók alapján a vezérváltozó legkisebb értéke $-\Delta_{\max}$ lehet, melynek értéke minden iterációban legalább Δ_A -val növekszik, így legfeljebb Δ iterációt végezhet az algoritmus mielőtt a következő x_r növelő pivot a vezérváltozót megengedetté tenné, vagy előállít egy primál infizibilis táblát. \square

Készen állunk az algoritmus lépésszámának becslésére.

3.1. TÉTEL. *Tekintsük az (1) megengedettségi feladatot, és tegyük fel hogy az algoritmus lokálisan nem erősen degenerált bázisokon halad végig. Ekkor az MBU szimplex algoritmus legfeljebb $m\Delta$ báziscserét végez a feladat megoldása során.*

Bizonyítás. A 3.3. Állítás alapján az algoritmus legfeljebb Δ báziscserét végez egy-egy vezérváltozó megengedettségeinek beállítása előtt, vagy elér egy infizibilis táblát. Az algoritmus indulásakor a nem megengedett változók maximális száma megegyezhet a sorok számával. A 3.1. és 3.2. Állítások alapján, ha egy változó megengedett egy iteráció során akkor az is marad, így az algoritmus nem ciklizálhat, és legfeljebb $m\Delta$ lépésben vagy megoldja a feladatot, vagy kimutatja, hogy a feladatnak nincs megoldása. \square

Megmutattuk, hogy a nemdegeneráltsági feltétel teljesülése esetén az algoritmus véges, és korlátot tudtunk adni a szükséges báziscserék maximális számára. Ez a felső korlát gyakran nagyon durva, így érdekes kérdés lenne olyan feladat-osztályokat keresni, amelyek esetén a korlát jól számítható, vagyis könnyen meghatározhatók a Δ_A és Δ_{\max} számok. Egy nyilvánvaló módon felmerülő ilyen feladat-osztály a teljesen unimoduláris mátrixok osztálya, azonban a legtöbb ilyen tulajdonságú feladat erősen degenerált, így a becslés csak a lokálisan nem erősen degenerált báziscserék számára ad egyszerű felső korlátot. Ezen felső korlátra a determinánsok meghatározásából $b \in \mathbb{Z}^m$ esetén egyszerű számolással a b oszlopa szerinti kifejtést használva $\Delta \leq \|b\|_1$ adódik. Érdekes kérdés lenne megfelelő perturbációkat találni adott feladat osztályokhoz, azonban megjegyezzük, hogy a perturbáció

nagyon erősen befolyásolja a lépésszám becslésében szereplő értékeket. A szakirodalomból ismert eljárások (mint amilyen az ϵ -perturbációs technika is [17, 6]) nem adnak megnyugtató választ a kérdésre².

4. Az erős degeneráltság kezelése

Ebben a fejezetben az MBU algoritmus *DegEljárás* (4.1. ábra) részét dolgozzuk ki. A degeneráltságot algoritmikus szempontból leggyakrabban perturbációval vagy indexválasztási szabályokkal kezelik [16].

Az előző fejezetben ismertetett algoritmus elemzésének kulcskérdése az algoritmus által bejárt táblák esetén az erős degeneráltság feltételének a nem teljesülése volt. A degeneráltság elleni eljárás, a vezérváltozó sora és a degenerált részfeladat alapján olyan báziscseréket végez, melyek az aktuális bázismegoldás értékét nem változtatják meg, de úgy transzformálják a pivot tábla belsejét, hogy az vagy primál nem megengedett legyen, vagy legyen olyan oszlopa melyben a vezérváltozó sorában negatív érték szerepel, és a tábla az adott oszlopra nézve lokálisan gyengén degenerált. A degenerált részfeladat kezelése során kizárólag a degenerált sorokban végzünk báziscserét.

Az algoritmus végességét az új típusú index választási szabályok alkalmazása esetén egyszerre, az [1] és [5] dolgozatokban is alkalmazott s vektor egy általánosításának segítségével bizonyítjuk.

4.1. Az s -monoton pivotálási szabályok

Legyen adott a B_0, B_1, \dots, B_k bázis sorozat, amellyel eljutottunk az aktuális B_k bázisba. A bázis sorozat minden bázisához megadható egy $s \in \mathbb{N}_{\oplus}^n$ vektor. Hasonlóan ahhoz, hogy a különböző pivotálási szabályokkal nyert s vektorok, ugyanúgy, ahogyan a bázis sorozatok általában eltérőek, az s vektorok is különböznek. A különböző pivotálási algoritmusok végességének az elemzése során, hasonló módszerek alkalmazhatóak. Ezeket szeretnénk bizonyos tulajdonságok definiálásával közös keretbe foglalni.

A degeneráció ellenes eljárásunk olyan index választási szabályokat használ, melyek teljesítik a következő tulajdonságot.

4.1. Definíció. Legyen adott egy index választáson alapuló pivotálási szabály, egy $s \in \mathbb{N}_{\oplus}^n$ vektor, amelynek a koordinátáit a feladat változóihoz rendeltük, és az algoritmus iterációi során, a pivotálási szabálytól függően módosulhatnak. A pivotálási szabálytól függő s vektor sorozatra az alábbi elvárásokat fogalmazzuk meg:

²Az ϵ -perturbációs technika kritikus mértékben rontja az adódó korlátot.

1. Az s vektor értékei a báziscserék során nem csökkennek, illetve kizárólag a mozgó változók értéke változhat. Amennyiben a pivotálási szabály több változó bázis állapot változását tenné lehetővé, akkor a mozgó változó indexét az s vektor maximális értékű elemei közül kell kiválasztani.
2. Ha a pivotálás során előállított valamelyik B_k bázis erősen degenerált, akkor az s vektor biztosítja, hogy a következő két eset valamelyike előforduljon:
 - (i) A B_k bázis után véges sok lépésben véget ér az algoritmus.
 - (ii) Ha léteznek olyan változók, melyek a B_k bázis után végtelen sokszor változtatnak bázis állapotot: az ilyen változók indexeinek a halmazát jelölje \mathcal{I}^* . A B_k bázis után, véges sok iterációval eljutunk egy olyan B^* bázishoz, amely esetén az s vektor szerinti legkisebb értékű, bázison kívüli változó egyértelmű az \mathcal{I}^* -ra nézve. Jelölje ezt a változót x_l .
3. Amikor a B_k bázis után az x_l változó belép a bázisba, akkor a belépés után addig, amíg az x_l változó újra távozik a bázisból igaz, hogy azon változók s értéke, amelyek az x_l változó bázisba lépése óta beléptek a bázisba nagyobb, mint az x_l változó s vektor szerinti értéke.

Azokat a pivotálási szabályokat, amelyekhez tartozó s vektorokra az 1–3. feltételek teljesülnek *s-monoton* pivotálási szabályoknak nevezzük.

Megmutatjuk, hogy számos index választási szabály eleget tesz az *s-monotonitási* tulajdonságnak. Megjegyezzük, hogy az index választási szabálytól függően lehet olyan bázis, melyre az s monotonitás második tulajdonsága teljesül, azonban a harmadik nem, azonban figyeljük meg, hogy ha az *s-monotonitási* tulajdonság 2/i tulajdonsága nem teljesül, akkor olyan B^* bázis létezését kötöttük ki, melyre 2/ii és 3 együtt teljesül.

A bizonyítások során csak a nem triviális 2/ii és 3 tulajdonságokat bizonyítjuk.

4.1. LEMMA. A Bland-féle minimál index szabály *s-monoton*.

Bizonyítás. A Bland-féle minimálindex szabály esetén az s vektort a következő módon konstansnak definiálhatjuk:

$$s_i = n - i, \quad i \in \mathcal{I}.$$

Könnyen belátható, hogy az így definiált s vektor tetszőleges részvektora szerinti legnagyobb érték minden esetben a legkisebb indexű változóhoz tartozik, így a maximális s érték kiválasztásának a szabálya tényleg a Bland-féle minimál index szabálynak megfelelő.

Az *s-monotonitás* első és második feltétele következik abból, hogy s értékei nem változnak. A B_{k+1} bázis esetén $\arg \min_{i \in \mathcal{I}_{N_{k+1}} \cap \mathcal{I}^*} s_i = u$ egyértelmű, hiszen az s_i értékek különbözőek, $s_u = n - u$, azaz u a legnagyobb indexű elem az $i \in \mathcal{I}_{N_{k+1}} \cap \mathcal{I}^*$

halmazban. Ha $v = \arg \min_{i \in \mathcal{I}_{B_{k+1}} \cap \mathcal{I}^*} s_i$ olyan, hogy $v \geq u$ (ekkor valójában $v > u$), akkor

$B^* = B_{k+1}$ és $l = u$, különben B^* az az első olyan bázis, amikor x_v , már bázison kívüli, és ekkor $l = v$.

A szabály harmadik elvárása azért teljesül, mert az s vektor konstans, így a mozgó változók közötti legkisebb indexű változó végig ugyanaz. \square

A LIFO pivotálási szabály szerint, választási lehetőség esetén, azon változókat részesítjük előnyben, melyek időben visszafelé a lehető legközelebbi időpontban mozogtak.

4.2. LEMMA. A LIFO pivotálási szabály s -monoton.

Bizonyítás. Az s vektort inicializáljuk azonosan nullának. Egy (l, k) báziscsere során, amennyiben ezen báziscsere az r . báziscsere, akkor az s vektor frissítése a következő szabály alapján történik:

$$s'_i = \begin{cases} r & \text{ha } i \in \{l, k\}, \\ s_i & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az s -monotonitási tulajdonság első pontja nyilvánvalóan teljesül. Legyen adott a definíció szerinti B_k bázis.

Legyen $\mathcal{M} = \mathcal{I}_{N_k} \cap \mathcal{I}^*$. Figyeljük az $i \in \mathcal{M}$ esetén az x_i változók mozgását, és ha valamely x_i változó belép a bázisba, akkor töröljük az \mathcal{M} halmazból, azaz $\mathcal{M} := \mathcal{M} - \{i\}$. Mivel $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}^*$, ezért véges sok báziscsere után $|\mathcal{M}| = 1$ teljesül. Az \mathcal{M} halmaz utolsó elemét jelöljük l -el. Ennél a bázisnál nyilván $l = \arg \min_{i \in \mathcal{I}_N \cap \mathcal{I}^*} s_i$, tehát az egyértelmű x_l változóhoz ezt a bázist jelöljük B^* -gal.

A harmadik pont azonnal következik a LIFO definíciójából. \square

A "most-often-selected-variable" (MOSV) pivotálási szabály azon változókat részesíti előnyben, melyek addig a legtöbbet mozogtak.

4.3. LEMMA. A "most-often-selected-variable" pivotálási szabály s -monoton.

Bizonyítás. Az s vektort inicializáljuk azonosan nullának. Egy (l, k) báziscsere során az s vektor frissítése a következő szabály alapján történik:

$$s'_i = \begin{cases} s_i + 1 & \text{ha } i \in \{l, k\}, \\ s_i & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az első tulajdonság azonnal következik az index választási szabály definíciójából.

Legyen $\mathcal{M}_N = \mathcal{I}_{N_k} \cap \mathcal{I}^*$ és $\mathcal{M}_B = \mathcal{I}^* \setminus \mathcal{M}_N$. Defináljuk a t_i értéket a következő módon:

$$t_i = \begin{cases} s_i, & \text{ha } i \in \mathcal{M}_N, \\ s_i + 1, & \text{ha } i \in \mathcal{M}_B. \end{cases}$$

Legyen $\mathcal{P} = \{i \in \mathcal{I}^* : i \in \arg \min_{j \in \mathcal{I}^*} t_j\}$ és $\min_{j \in \mathcal{I}^*} t_j = p$. Folytassuk az iterációt a pivot szabálynak megfelelően. Mivel $\mathcal{P} \subset \mathcal{I}^*$, ezért bármely $i \in \mathcal{P}$ esetén lesz egy

olyan bázis, amikor az x_i változó a B_k után először lép be a bázisba. Ekkor töröljük az indexét \mathcal{P} -ből, azaz $\mathcal{P} := \mathcal{P} \setminus \{i\}$. Véges sok báziscsere után előáll egy olyan \mathcal{P} halmaz, mely esetén $|\mathcal{P}| = |\{l\}| = 1$. Az aktuális bázis utáni első bázis, mikor végül x_l belép a bázisba, legyen B^* . Megmutatjuk, hogy az x_l változó kiválasztása ekkor már egyértelmű. Nyilván ebben az esetben $s_l = p$, attól függetlenül, hogy az x_l a B_k bázis esetén bázis változó volt-e vagy sem. A pivotálási szabály miatt $p < s_i$, ha $i \in \mathcal{I}^* \setminus \mathcal{P}$, és mivel minden $i \in \mathcal{P} \setminus \{l\}$ már legalább egyszer belépett a bázisba, ezért ha most bázison kívül van, és a B_k bázis esetén is bázison kívül volt, akkor az s szerinti értéke legalább $p + 2$. Másfelől, ha a B_k bázis esetén bázisban volt, akkor jelenleg az s szerinti értéke legalább $p + 1$. Így a második tulajdonság teljesül.

Az s -monoton pivotálási szabály harmadik feltétele is teljesül, mivel a B_k bázis után az x_l változó, a MOSV szabály alkalmazása esetén a fentiek szerint a B^* bázisnál lép be a bázisba, és az \mathcal{I}^* -beli később belépők mindegyikének már a B^* bázis esetén is nagyobb volt az s szerinti értéke. \square

4.2. Az algoritmus végessége degenerált esetben

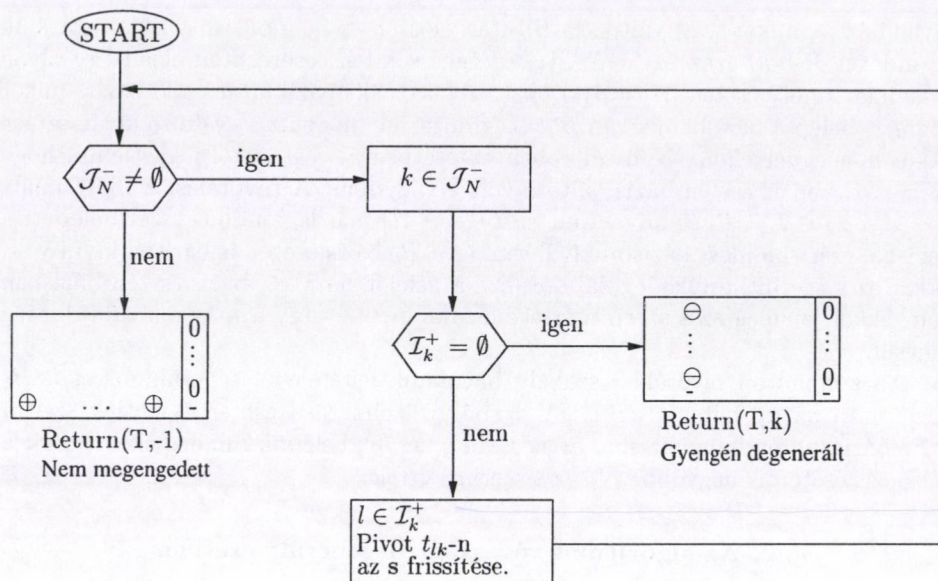
Készen állunk a degeneráltság kezelésére szolgáló algoritmusunk definiálására, amelynek pseudo kódját a 4.1. Algoritmus, míg folyamatábráját a 5. ábra foglalja össze. Megjegyezzük, hogy lehetséges a teljes algoritmus során ugyanazt az s vektort használni, azonban elegendő annak csupán a degenerált részfeladatok kezelése során történő bevezetése is. Az egyszerűség kedvéért a leírás során ezen utóbbi stratégiát választjuk.

4.1. Algoritmus. Egy lehetséges degeneráltság elleni DegEljárás, az s vektort használva.

```

 $(T, l) = \text{DegEljárás}(T, \mathcal{I}_B^0, r)$ 
Az  $s$  vektor inicializálása.
 $\mathcal{J}_N^- := \{j \in \mathcal{I}_N : t_{rj} < 0\}$ .
While  $(\mathcal{J}_N^- \neq \emptyset)$  do
    Legyen  $k \in \mathcal{K} := \{i \in \mathcal{J}_N^- : s_i = \max\{s_j : j \in \mathcal{J}_N^-\}\}$  tetszőleges index.
     $\mathcal{I}_k^+ := \{i \in \mathcal{I}_B^0 \mid t_{ik} > 0\}$ .
    If  $(\mathcal{I}_k^+ = \emptyset)$  then
        A hívó tábla gyengén degenerált, Return $(T, k)$ .
    Endif
    Legyen  $l \in \mathcal{L} := \{i \in \mathcal{I}_k^+ : s_i = \max\{s_j : j \in \mathcal{I}_k^+\}\}$  tetszőleges index.
    Pivotálás a  $t_{lk}$  elemen, az  $s$  vektor frissítése.
     $\mathcal{J}_N^- := \{j \in \mathcal{I}_N : t_{rj} < 0\}$ .
Endwhile
A hívó tábla nem megengedett, Return $(T, -1)$ .
Return $(T, l)$ .
End

```

5. ábra. Egy lehetséges degeneráltság elleni eljárás folyamatábrája, az s vektort használva. A bázistáblákat a degenerált részre, és a vezérváltozó sorára megszorítva ábrázoltuk.

Figyeljük meg, hogy a degeneráció elleni eljárás mindkét leállási táblája biztosítja a teljes algoritmus végességét, hiszen a teljes táblára nézve az egyik esetben növelő pivot lehetséges, míg a másik esetben nem megengedettségi miatt az algoritmus véget ér. Így elegendő bizonyítani hogy a degeneráció elleni eljárás véges.

Bizonyításunk a jól ismert ortogonalitási tételre alapszik. Egy adott B bázis és hozzá tartozó T rövid pivot tábla esetén definiáljuk a $\mathbf{t}^{(i)}$, $i \in \mathcal{I}_B$, illetve a \mathbf{t}_j , $j \in \mathcal{I}_N \cup \{b\}$ vektorokat a következőképpen [13]:

$$(\mathbf{t}^{(i)})_k = \begin{cases} t_{ik}, & \text{ha } k \in \mathcal{I}_N \cup \{b\} \\ 1, & \text{ha } k = i \\ 0, & \text{ha } k \in \mathcal{I}_B \setminus \{i\} \end{cases}$$

illetve

$$(\mathbf{t}_j)_k = \begin{cases} t_{kj}, & \text{ha } k \in \mathcal{I}_B \\ -1, & \text{ha } k = j \\ 0, & \text{ha } k \in (\mathcal{I}_N \cup \{b\}) \setminus \{j\} \end{cases}$$

Ezek után az ortogonalitási tételt [13] az alábbi formában mondhatjuk ki:

4.1. TÉTEL. Legyen adott az (1) megengedettségi feladat két tetszőleges B' , illetve B'' bázisa. Bármely $\mathbf{t}'^{(i)}$, $i \in \mathcal{I}_{B'}$ vektor merőleges bármely \mathbf{t}_j'' , $j \in \mathcal{I}_{B''}$ vektorra.

Készen állunk eljárásunk végességének bizonyítására.

4.2. TÉTEL. *Ha a degenerációs eljárás s-monoton pivotálási szabályt alkalmaz, akkor véges.*

Bizonyítás. A **DegEljárás** esetén a teljes feladat csupán a degenerált sorokból és a vezérváltozó sorából áll.

Tegyük fel indirekt módon, hogy a degeneráció elleni eljárás nem véges. Mivel a bázisok száma véges, így ez csak úgy lehetséges, ha az eljárás ciklizál³. Tekintsünk egy minimális méretű ciklizáló példát. Az s monotonitás tulajdonságai miatt egy ilyen feladat esetén minden változó – a vezérváltozó kivételével – végtelen sokszor mozog.

Mivel a pivotálási szabály s-monoton, ezért van olyan B' bázis és x_l bázison kívüli változó, melynek az s vektor szerinti értéke a bázisba való belépés pillanatában a bázison kívüli változók közül minimális (1. és 2. tulajdonság alapján). Mivel az algoritmus a lehetséges x_i változók közül a legnagyobb s_i értékűt választja ki, ez csak úgy lehetséges, hogy ha a B' bázishoz tartozó $t'^{(r)}$ vektorra $t'_{rl} < 0$, illetve $t'_{ri} \geq 0$ bármely $i \in \mathcal{I} - \{l\}$ esetén.

Tekintsük most azt a B'' bázist, mikor az x_l változó legközelebb kilép a bázisból. A belépő változó legyen az x_k . A degeneráció elleni eljárás szabálya szerint ez azt jelenti, hogy a t_k'' vektor pozitív elemeihez tartozó változók közül az x_l értéke a legnagyobb az s'' vektorban, hiszen egyéb esetben másik változót választott volna az eljárás. A kisebb s értékű változók azonban az s szabály harmadik pontja alapján kizárólag olyan változók lehetnek, melyek B' bázis óta nem mozogtak. Legyen ezen változók indexeinek halmaza \mathcal{K} , vagyis $\mathcal{K} = \{j \in \mathcal{I}_{B''} : t_{jk}'' > 0\} \cap \mathcal{I}_{B'}$. Jelölje továbbá $\mathcal{L} = \{j \in \mathcal{I}_{B''} : t_{jk}'' \leq 0\}$ indexhalmazt. Nyilván $l \notin \mathcal{L} \cup \mathcal{K}$. A B' és B'' bázisokhoz tartozó pivot táblát a 6. ábra mutatja.

$B' :$

	0
	⋮
	0
$x_r \quad \oplus \cdots \oplus \quad - \quad \oplus \cdots \oplus$	-

 x_l

$B'' :$

+	0
	⋮
	0
-	-

 x_k

6. ábra. A B' és B'' bázisok.

³A flexibilis index választási szabályok esetén ciklizálás alatt csupán annyit értünk, hogy az algoritmus végtelen sokszor visszatér egy adott állapotba (bázisba).

Mivel $t'_{ri} = 0$, ha $i \in \mathcal{K}$, és $t''_{ik} = 0$, ha $i \in \mathcal{I}_{N''} - \{k\}$, így

$$\begin{aligned} t''^{(r)T} t''_k &= \sum_{i \in \mathcal{I}_{N''}} t'_{ri} t''_{ik} + \sum_{i \in \mathcal{K}} t'_{ri} t''_{ik} + \sum_{i \in \mathcal{L}} t'_{ri} t''_{ik} + t'_{rl} t''_{lk} + t'_{rr} t''_{rk} \leq t'_{rl} t''_{lk} + t'_{rr} t''_{rk} = \\ &= t'_{rl} t''_{lk} + t''_{rk} < 0, \end{aligned}$$

mivel $t'_{rj} \geq 0$, ha $j \in \mathcal{L}$, és $t'_{ri} t''_{ik} = 0$, ha $i \in \mathcal{K}$, mivel ezek a változók nem mozogtak a két bázis között. Figyelembe véve a $t'_{rl} < 0$ és $t''_{lk} > 0$, illetve $t'_{rr} = 1$ és $t''_{rk} < 0$ feltételeket $t'_{rl} t''_{lk} < 0$ adódik, amely ellentmond az ortogonalitási tételnek. \square

Figyelembe véve, hogy a **DegEljárás** során az x_r változó egyetlen egyszer sem lép be a bázisba az iterációk során, valamint a 6. ábrán bemutatott leállási táblák alapján világosan látszik, hogy a degenerált részfeladat megfogalmazható lenne lineáris programozási részfeladatként is, az x_r vezérváltozó sorával, mint célfüggvény sorral.

Másfelől, bármely a lineáris programozási feladatok pivot algoritmussal történő megoldásának a végességét biztosító módszer (pl. lexikografikus szabály) is alkalmazható lenne a **DegEljárás** egy módosított változatában. Erre egy utalás erejéig Anstreicher és Terlaky [2] is kitér a lineáris programozási feladatra megfogalmazott MBU-szimplex módszerről írt cikkükben.

Az előzőek alapján kimondjuk, hogy az s-monoton pivotálási szabállyal megfogalmazott algoritmusunk véges.

4.3. TÉTEL. *Tetszőleges megengedettségi feladatot az MBU-algoritmussal, s-monoton indexválasztási szabály alkalmazása esetén véges sok pivot iterációban megoldhatunk.*

Bizonyítás. Nem erősen degenerált feladatok esetén a növelő báziscserék biztosítják, hogy egy adott bázis ne térhessen vissza. Erősen degenerált pivot táblát a degeneráció elleni eljárás a 4.2. Tétel alapján véges sok pivot lépésben gyengén degenerálttá konvertálja, vagy kimutatja hogy a feladat nem megengedett anélkül, hogy a tábla jobboldalát megváltoztatná. \square

4.3. Algoritmus változatok

Gyakorlatban az algoritmus hatékonysága növelhető, ha a vezérváltozó, illetve a bázisba belépő elem választása nem tetszőleges, habár éppen ez a szabadsága hasonlóan az index-választási szabályok flexibilitásához numerikusan rosszul viselkedő feladatok esetén praktikus lehet.

A pivot típusú módszerek legköltségesebb része a bázistábla megfelelő sorainak, illetve oszlopainak az előállítás. Azonban a báziscserék hatékonyságának szempontjából érdekes lehet a vezérváltozó meghatározásakor a megfelelő sorok degeneráltságának vizsgálata, ugyanis könnyen előfordulhat, hogy egy adott vezérváltozóhoz tartoznak lokálisan gyengén, illetve erősen degenerált oszlopok is. Hasonlóan, előfordulhat olyan bázistábla is, melyen választható olyan vezérváltozó,

mely egy lépésben megengedetté tehető, de van olyan vezérváltozó is, melynek megengedetté tételéhez degeneráció ellenes eljárás szükséges.

Ha a bázistábla nagyobb részét ismerjük, olcsón elvégezhető a következő, lokálisan erős degeneráltság elleni taktika. Amennyiben bármelyik lépésben lenne olyan negatív változó, mely sorában lehetséges olyan báziscserét végezni, amely növeli a megengedett változók számát, akkor a vezérváltozót a végesség veszélyeztetése nélkül le lehet cserélni.

Sajnos ez az ötlet az erős degenerált tábláknál nem mindig alkalmazható, ahogy azt a 3. ábra példája is mutatta.

Az MBU algoritmus tulajdonságaira építve kifejleszthető a degeneráltság kezelésére egy rekurzív primál-duál eljárás is [3].

A **DegEljárás** végességének a biztosítására kifejlesztett módszerek egyszerűen átvihetők lineáris programozási pivot algoritmusok végességének az igazolására is. Ebben az értelemben a 3. és 4. Tételek eredményei az Illés és Mészáros [11], illetve az S. Zhang [21] cikkében szereplő végesség bizonyítások közös általánosítása.

Köszönetnyilvánítás.

Csizmadia Zsolt és Illés Tibor köszönetet mond a MOL Rt.-nek, a számukra biztosított kutatási ösztöndíjért. Ezt a kutatást az OTKA T 049789 számú pályázata és a TÉT SLO-4/2005 számú pályázata támogatta.

Hivatkozások

- [1] AKKELES A. A. BALOGH L. ÉS ILLÉS T.: *A véges criss-cross módszer új variánsai biszimmetrikus lineáris komplementaritási feladatra*. Alkalmazott Matematikai Lapok **21**:1-25, (2003).
- [2] ANSTREICHER, K. M. AND TERLAKY T.: *A Monotonic Build-Up Simplex Algorithm for Linear Programming*. Operations Research **42**:556-561, (1994).
- [3] BILEN F., CSIZMADIA ZS. AND ILLÉS T.: *Anstreicher-Terlaky type monotonic simplex algorithms for linear feasibility problems*. Optimization Methods and Software, Vol. **22**, No. **4**, 679-695, (2007).
- [4] BORGWARDT, K. H.: *The Simplex Method: A Probabilistic Analysis*. Algorithms and Combinatorics, Vol. **1**, Springer, Berlin, (1987).
- [5] CSIZMADIA ZS. AND ILLÉS T.: *New criss-cross type algorithms for linear complementarity problems with sufficient matrices*. Optimization Methods and Software, Vol. **21**, 2:247-266, (2006).
- [6] CHVATAL, V.: *Linear programming*. W. H. Freeman and Company, New York, (1983).
- [7] DANTZIG, G. B.: *Programming in a Linear Structure*. Comptroller, USAF, Washington D.C., (1948).

- [8] DANTZIG, G. B.: *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, (1963).
- [9] FUKUDA K. AND TERLAKY T.: *Criss-cross methods: A fresh view on pivot algorithms*. Mathematical Programming **79**:369–395, (1997).
- [10] FUKUDA K. AND TERLAKY T.: *On the existence of a short admissible pivot sequence for feasibility and linear optimization problems*. Pure Mathematics with Applications **10** no. **4**, 431–447, (1999).
- [11] ILLÉS T. ÉS MÉSZÁROS K.: *A Farkas-lemma egy új és elemi bizonyítása*. KOMLÓSI S. ÉS SZÁNTAI T. (SZERKESZTŐK): *Új utak a magyar operációkutatásban: In memoriam Farkas Gyula*. Dialóg Campus Kiadó, Pécs, (1999).
- [12] KARMARKAR, N.: *A new polynomial-time algorithm for linear programming*. Combinatorica **4**:373–395, (1984).
- [13] KLAFSZKY E. ÉS TERLAKY T.: *A pivot technika szerepe a lineáris algebra néhány alapvető tételének a bizonyításában*. Alkalmazott Matematikai Lapok **14**:425–448, (1989).
- [14] KLAFSZKY E. ÉS TERLAKY T.: *Magyar módszer típusú algoritmusok lineáris programozási feladatok megoldására*. Alkalmazott Matematikai Lapok **12**, 1–14, (1986).
- [15] KLEE, V. ÉS MINTY, G. J.: *How good is the simplex algorithm?* In O. Shisha, editor, Inequalities III, Academic Press, New York, (1972).
- [16] MAROS I.: *Computational Techniques of the Simplex Method*. Kluwer Academic Publishers, Boston, (2003).
- [17] MURTY, K. G.: *Linear and combinatorial programming*. Robert E. Krieger Publishing Co. Inc., Melbourne, (1985).
- [18] TERLAKY T.: *A convergent criss-cross method*. Mathematische Operationsforschung und Statistik Series Optimization, Vol. **16**, No. **5**, 683–690, (1985).
- [19] TERLAKY T. AND ZHANG, S.: *Pivot rules for linear programming: A survey on recent theoretical developments*. Annals of Operations Research **46**:203–233, (1993).
- [20] TODD, M. J.: *Polynomial expected behavior of a pivoting algorithm for linear complementarity and linear programming problems*. Mathematical Programming **35**:173–192, (1986).
- [21] ZHANG, S.: *A new variant of criss-cross pivot algorithms for linear programming*. European Journal of Operational Research, **116**:607–614, (1999).

(Beérkezett: 2005. március 21.)

CSIZMADIA ZSOLT, ILLÉS TIBOR
 EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
 OPERÁCIÓKUTATÁSI TANSZÉK
 1117 BUDAPEST, PÁZMÁNY PÉTER SÉTÁNY 1/C.
 csisza@math.elte.hu, illes@math.elte.hu

BILEN, FILIZ

EASTERN MEDITERRANEAN UNIVERSITY

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

FAMAGUSTA, NORTH-CYPRUS

filiz.erbilen@mail.emu.edu.tr

A NEW ANALYSIS FOR MONOTONIC TYPE SIMPLEX ALGORITHMS
FOR FEASIBILITY PROBLEMS

ZSOLT CSIZMADIA, FILIZ BILEN AND TIBOR ILLÉS

A variant of Anstreicher and Terlaky's (1994) monotonic build-up (MBU) simplex algorithm for linear feasibility problems is defined. Under a nondegeneracy assumption weaker than the usual one, the complexity of the algorithm can be given by $m\Delta$, where Δ is a constant determined by the input data of the problem and m is the number of constraints. The constant Δ cannot be bounded in the general case by a polynomial of the bit length of the input data.

Flexible index selection rules provide finiteness for strongly degenerate problems. The flexibility of the rules provides possibility to avoid numerically instable pivots. The proof of finiteness is presented in a unified framework – using the s -monoton property of pivot rules, defined in this paper –, that incorporates the usual minimal index rule, the Last-In-First-Out and the most-often-selected-variable index rules.

Key words: feasibility problem, monoton simplex algorithms, degeneracy, linear programming, index selection rules.

AZ ITERÁLT SHUFFLE MŰVELET ALKALMAZÁSA REGULÁRIS NYELVEKEN

IVÁN SZABOLCS

A párhuzamos folyamatok elméletében központi szerepet játszanak a *shuffle-szorzás* (\sqcup) és iterált megfelelője, a *shuffle-iterált* ($^*\sqcup$) műveletek. Nem ismert, hogy egy adott reguláris (vagy véges) nyelv shuffle-iteráltja mikor reguláris, illetve környezetfüggetlen; vizsgálatainkban bizonyos speciális reguláris nyelvekre megválaszoljuk e kérdéseket, továbbá adunk egy reguláris nyelvosztályt is, mely zárt mindkét műveletre.

1. Bevezetés

A *shuffle-szorzat* egy jól ismert kommutatív és asszociatív kétváltozós művelet nyelvek között. Ha L_1, L_2 nyelvek a Σ ábécé fölött, shuffle-szorzatuk, $L_1 \sqcup L_2$ szintén Σ fölötti nyelv, amit a következőképp definiálunk:

$$L_1 \sqcup L_2 = \{x_1 y_1 \dots x_n y_n : x_1 x_2 \dots x_n \in L_1, y_1 y_2 \dots y_n \in L_2, x_i, y_i \in \Sigma^*\}.$$

Egy Σ fölötti L nyelv *shuffle-iteráltja*, $L^{*\sqcup}$ szintén Σ fölötti nyelv; ezt a következőképp definiálhatjuk:

$$L^{*\sqcup} = \{\lambda\} \cup L \cup (L \sqcup L) \cup (L \sqcup L \sqcup L) \cup \dots$$

Jól ismert tény, hogy a Chomsky-hierarchia \mathcal{L}_1 és \mathcal{L}_0 osztályai zártak mindkét műveletre, lásd pl. [1]. A reguláris nyelvek osztálya, \mathcal{L}_3 a shuffle-szorzásra zárt, ám nem zárt a shuffle-iterált képzésére; a környezetfüggetlen nyelvek osztálya, \mathcal{L}_2 pedig nem zárt egyik műveletre sem, lásd [1]. A *shuffle nyelvek* \mathcal{SL} osztályát [1, 9] úgy definiáljuk, mint a legszűkebb olyan nyelvosztályt, mely tartalmazza a véges (vagy reguláris) nyelveket, és zárt mind a reguláris műveletekre, mind a shuffle-szorzásra és a shuffle-iterált képzésére. A fenti zártsági tulajdonságok alapján $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{L}_1$. [13]-ban igazolást nyert, hogy $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{P}$, ahol \mathcal{P} a polinom időben determinisztikusan eldönthető nyelvek osztálya. Továbbá, [15] szerint léteznek \mathcal{SL} -ben \mathcal{P} -teljes problémák is. Egy \mathcal{SL} -en belüli végtelen hierarchiát adtak meg [10]-ben. Az iterált shuffle művelettel lehet \mathcal{NP} -teljes nyelveket is definiálni, lásd [16]. Reguláris nyelvek varietásainak (ld. [14]) a shuffle műveletre való lezártjáról lásd [3].

[2]-ben igazolták, hogy eldönthetetlen a következő kérdés: adott egy shuffle nyelv (egy „shuffle-kifejezéssel”, melyben a reguláris műveleti jelek, a \sqcup és a $^*\sqcup$ szerepelnek), L reguláris nyelv-e? További eldönthetlenségi eredmények találhatók az [5, 8, 11, 12] cikkekben.

Ugyanez a kérdés *kommutatív* shuffle-nyelvekre eldönthető, lásd [4]. Jelenleg nem ismert, hogy eldönthető-e a következő kérdés: adott egy reguláris nyelv, igaz-e, hogy shuffle-iteráltja reguláris (vagy hogy környezetfüggetlen). A probléma nyitott *véges* nyelvekre is. A [4]-beli eredmények szerint a kérdés eldönthető kommutatív reguláris nyelvekre; egy közvetlen bizonyítás található [7]-ben. Azonban az ezen munkákban megjelent módszerek nem adnak explicit felső korlátot a kérdés bonyolultságára.

Ebben a cikkben szükséges és elégséges feltételeket adunk arra nézve, hogy bizonyos reguláris nyelvek shuffle-iteráltja reguláris vagy környezetfüggetlen legyen.

2. Definíciók, jelölések

Jelen cikkben \mathcal{N} jelöli a természetes számok $\{0, 1, \dots\}$ halmazát. Amennyiben $n \in \mathcal{N}$, $[n]$ jelenti a $\{0, 1, \dots, n\}$ halmazt.

A formális nyelvek elméletében szereplő standard jelöléseket (ld. [6]) és elnevezéseket fogjuk használni: *ábécének* nevezünk bármely véges halmazt, egy ábécé elemei a betűk. Az ábécék jelölésére a Σ , Γ betűket használjuk, a betűket az a, b, c, \dots betűkkel jelöljük, szükség esetén indexelve.

Σ ábécé fölötti *szónak* nevezünk bármely, Σ elemeiből képzett véges sorozatot, azaz $a_1 a_2 \dots a_n$ alakú sorozatokat, ahol $n \in \mathcal{N}$ és minden $1 \leq i \leq n$ -re $a_i \in \Sigma$. Ekkor a szó hossza, $|a_1 \dots a_n| = n$; a benne levő a betűk számát (ahol $a \in \Sigma$) $|a_1 \dots a_n|_a$ jelzi. Ha $n = 0$, a szó az üres szó, aminek jele a λ . A Σ fölötti összes szavak halmazát Σ^* jelöli. Szavakra általában az u, v, w, x, y jelöléseket használjuk. Amennyiben w egy szó, $i \in \mathcal{N}$ és a w_i jelölés még nem definiált, úgy w_i a w szó i . betűjét jelenti.

Ha adott egy Σ ábécé fölötti két szó,

$$a_1 a_2 \dots a_n \text{ és } b_1 \dots b_k \quad (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k \in \Sigma),$$

akkor (ilyen sorrendű) *konkatenáltjuk* az $a_1 \dots a_n b_1 \dots b_k$ szó. Σ^* a konkatenáció műveletével monoidot alkot, melynek egységeleme λ , az üres szó.

Σ ábécé feletti szavak bármely (üres, véges vagy végtelen) halmazát *nyelvnek* nevezzük. Az egyelemű nyelveket azonosítjuk egyetlen elemükkel; ez nem okoz majd félreértést. Nyelveket általában K vagy L jelöl, szükség szerint indexelve.

Nyelvek között értelmezhetjük a halmazelméleti műveletek mellett a konkatenáció műveletét: ha K és L két nyelv, akkor legyen $KL = \{uv : u \in K, v \in L\}$. A konkatenáció segítségével definiálhatjuk nyelvek nemnegatív egész kitevőjű hatványait: ha L egy nyelv, legyen

- $L^0 = \{\lambda\}$;
- $L^{n+1} = L^n L$.

Egy nyelvnek definiáljuk továbbá (*Kleene-iteráltját*) is: ha L egy nyelv, legyen

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i.$$

Nyelveket bonyolultságuk szerint osztályokba sorolhatunk. Cikkünk a *reguláris* és a *környezetfüggetlen* nyelvek osztályával foglalkozik; ezen osztályokat definiálhatjuk például a következőképpen:

- Egy L nyelv reguláris, ha előáll a véges nyelvekből a konkatenáció, Kleene-iteráció és a halmazelméleti műveletek véges sokszori alkalmazásával.
- Egy L nyelv környezetfüggetlen, ha létezik olyan P veremautomata, melyre $L_\emptyset(P) = L$ (ld. lentebb).

Veremautomatának nevezünk egy a $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ rendszert, ahol

- Q állapotok véges halmaza;
- Σ a véges inputábécé;
- Γ a véges veremábécé;
- δ egy $Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma$ -ből $Q \times \Gamma^*$ véges részhalmazába képező függvény, az átmenetfüggvény;
- $q_0 \in Q$ a kezdőállapot, $Z_0 \in \Gamma$ a verem-kezdőszimbólum, $F \subseteq Q$ a végállapotok halmaza.

A fenti P veremautomata egy konfigurációja egy $Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ -beli elem.

Konfigurációk között értelmezzük a \vdash *rákövetkezési* relációt: $(p, x, X) \vdash (q, y, Y)$ pontosan akkor, ha az alábbiak valamelyike teljesül:

- $x = ay$ valamely $a \in \Sigma$ betűre, $X = \gamma X'$, $Y = \gamma_1 \dots \gamma_n X'$ valamely $X' \in \Gamma^*$, $\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ veremszimbólumokra, és $\delta(p, a, \gamma) \ni (q, \gamma_1 \dots \gamma_n)$;
- $x = y$, $X = \gamma X'$, $Y = \gamma_1 \dots \gamma_n X'$ valamely $X' \in \Gamma^*$ szóra, $\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ veremszimbólumokra és $\delta(p, \lambda, \gamma) \ni (q, \gamma_1 \dots \gamma_n)$.

A fenti P veremautomata által üres veremmel felismert nyelv

$$L_\emptyset(P) = \{w \in \Sigma^* : (q_0, w, Z_0) \vdash (q, \lambda, \lambda) \text{ valamely } q \in Q\text{-ra}\};$$

itt $*$ a reflexív-tranzitív lezárás jele.

Nyelvek között értelmezzük a *shuffle-szorzás* műveletét is: ha K, L nyelvek, akkor legyen

$$K \sqcup L = \{x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_n y_n : x_1 x_2 \dots x_n \in K, y_1 y_2 \dots y_n \in L, x_i, y_i \in \Sigma^*\}.$$

A shuffle-szorzás a konkatenációhoz hasonlóan asszociatív, így ennek a műveletnek a segítségével is definiálhatjuk nyelvek nemnegatív egész kitevőjű hatványait: ha L egy nyelv, legyen

- $L^{0\sqcup} = \{\lambda\};$
- $L^{(n+1)\sqcup} = L^{n\sqcup}\sqcup L.$

A Kleene-iterálthoz hasonlóan kapjuk egy L nyelv *shuffle-iteráltját*: $L^{*\sqcup} = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^{i\sqcup}.$
 Használni fogjuk továbbá a *legfeljebb n . shuffle-iterált* jelölését: $L^{\leq n\sqcup} = \bigcup_{i=0}^n L^{i\sqcup}.$

A *részszó* fogalmát többféleképp szokták definiálni. Ebben a cikkben ha x és y két szó, akkor mondjuk, hogy x részszava y -nak, ha létezik olyan w szó, melyre $y \in x\sqcup w.$

A shuffle és a shuffle-iterált műveletekre számos jól ismert összefüggés áll fenn, a teljesség igénye nélkül néhány:

- A \sqcup művelet kommutatív, asszociatív.
- Tetszőleges K, L_1, L_2 nyelvekre $K\sqcup(L_1 \cup L_2) = (K\sqcup L_1) \cup (K\sqcup L_2).$
- Tetszőleges K, L nyelvekre $(K \cup L)^{*\sqcup} = K^{*\sqcup}\sqcup L^{*\sqcup}.$
- A reguláris nyelvek osztálya zárt a shuffle-szorzásra, nem zárt viszont a shuffle-iterált képzésére.
- A környezetfüggetlen nyelvek osztálya sem a shuffle-szorzásra, sem a shuffle-iterált képzésére nem zárt.

Ha $\Sigma = \{a_1, \dots, a_k\}$ egy ábécé, és w egy Σ fölötti szó, akkor w *Parikh-képe*, $\Phi(w)$ az az \mathcal{N}^k -beli vektor, melynek i . koordinátáján $|w|_{a_i}$ áll.

Nyelvekre is kiterjesztjük a Parikh-függvényt: ha $L \subseteq \Sigma^*$, legyen

$$\Phi(L) = \{\Phi(w) : w \in L\}.$$

3. Elemi eredmények

Első vizsgálataink a legegyszerűbb olyan reguláris nyelvekre irányulnak, melyekre a kérdés nemtriviális: az egyetlen szóból álló nyelvekre. Kezdjük egy egyszerű állítással:

3.1. ÁLLÍTÁS. Legyen Σ tetszőleges ábécé és $u, v_1, v_2, \dots, v_n \in \Sigma^*$ úgy, hogy $u \in v_1\sqcup v_2\sqcup \dots \sqcup v_n.$ Ekkor $\Phi(u) = \Phi(v_1) + \Phi(v_2) + \dots + \Phi(v_n).$

Az állítás néhány egyszerű következménye:

3.1. KÖVETKEZMÉNY. Tetszőleges L nyelvre $\Phi(L^{*\sqcup}) = \Phi(L^*)$ (ezt úgy is mondjuk, hogy $L^{*\sqcup}$ és L^* betűekvivalens).

3.2. KÖVETKEZMÉNY. *Tetszőleges u és v szavakra ha $u \in v^{*\sqcup}$, akkor $\Phi(u) = k\Phi(v)$ valamely $k \in \mathcal{N}$ -re.*

Most már be tudjuk bizonyítani első eredményünket:

3.1. TÉTEL. *Tetszőleges w szóra $w^{*\sqcup}$ pontosan akkor reguláris, ha $w \in a^*$ valamely a betűre.*

Bizonyítás. Az elegendőség triviális, hiszen ha $w \in a^*$, akkor $w^{*\sqcup} = w^*$, ami reguláris nyelv. Belátjuk, hogy ha nem létezik olyan a betű, melyre $w \in a^*$, akkor $w^{*\sqcup}$ nem reguláris. Legyen tehát $w = a^n b y$ valamely $a \neq b \in \Sigma$, $n > 0$, $y \in \Sigma^*$ -ra. Tegyük fel, hogy $w^{*\sqcup}$ reguláris. Ekkor a pumpáló lemma szerint kell létezzen olyan $N \in \mathcal{N}$ konstans, melyre tetszőleges $u \in w^{*\sqcup}$ esetén, ha $|u| > N$, úgy u felírható $u = u_1 u_2 u_3$ alakban oly módon, hogy a következők fennállnak:

- $|u_1 u_2| \leq N$;
- $u_2 \neq \lambda$;
- tetszőleges $i \in \mathcal{N}$ esetén $u_1 u_2^i u_3 \in w^{*\sqcup}$.

Vegyük az $u = a^{nN} b^N y^N \in w^{*\sqcup}$ szót! E szóra a feltételek fennállnak. Tekintve bármely, a fenti három kikötésnek eleget tevő u_1, u_2, u_3 szót, az $|u_1 u_2| \leq N$ feltétel miatt (mivel u első N betűje csupa a) $u_2 = a^j$ valamely $j > 0$ -ra. Ekkor viszont $u' = u_1 u_2^2 u_3$ nem lehet $w^{*\sqcup}$ -beli szó, hiszen $|u'|_b = N|u|_b$, de $|u'|_a > N|u|_a$. Ebből következően nem létezik olyan $k \in \mathcal{N}$ szám, melyre $\Phi(u') = k\Phi(u)$. Ellentmondásra jutottunk, így $w^{*\sqcup}$ valóban nem reguláris. \square

Folytatva a $w^{*\sqcup}$ alakban előálló nyelvek vizsgálatát, a következő eredmény is adódik:

3.2. TÉTEL. *Tetszőleges w szóra, melyben az alternálások száma legalább 2 (azaz bármely a, b betűket is tekintünk, $w \notin a^* b^*$ fennáll), $w^{*\sqcup}$ nem lehet környezetfüggetlen.*

Bizonyítás. Írjuk fel w -t $w = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}$ alakban, ahol minden $1 \leq i < k$ esetén $a_i \neq a_{i+1}$, és minden $1 \leq i \leq k$ esetén $n_i > 0$. A feltétel szerint tehát ekkor $k > 2$. Tekintsük az $L = w^{*\sqcup} \cap a_1^* a_2^* \dots a_k^*$ nyelvet. Könnyen láthatóan ekkor $L = \{a_1^{n_1 N} a_2^{n_2 N} \dots a_k^{n_k N} : N \in \mathcal{N}\}$. Mivel a környezetfüggetlen nyelvek osztálya zárt a reguláris nyelvvel való metszésre, elegendő belátni, hogy L nem környezetfüggetlen. Ehhez a Bar-Hillel lemmát alkalmazzuk: amennyiben L környezetfüggetlen nyelv, úgy léteznek $p, q > 0$ egészek úgy, hogy tetszőleges $u \in L$ -beli szó, melyre $|u| > p$, felírható $u = u_1 u_2 u_3 u_4 u_5$ alakban úgy, hogy a következők fennállnak:

- $|u_2 u_3 u_4| < q$;
- $u_2 u_4 \neq \lambda$;
- minden $i > 0$ egész esetén $u_1 u_2^i u_3 u_4^i u_5 \in L$.

Tegyük fel tehát, hogy L környezetfüggetlen és a p, q egészek rendelkeznek a fenti tulajdonsággal. Vegyük az $u = a_1^{(p+q)n_1} a_2^{(p+q)n_2} \dots a_k^{(p+q)n_k} \in L$ szót. Erre a szóra $|u| > p$, így a lemma szerint felírható $u = u_1 u_2 u_3 u_4 u_5$ alakban úgy, hogy a fenti három feltétel fennáll. Tekintsük az $u' = u_1 u_2^2 u_3 u_4^2 u_5$ szót! u konstrukciója és az $|u_2 u_3 u_4| < q$ feltétel miatt az $u_2 u_3 u_4$ szó legfeljebb két szomszédos blokkot érinthet (itt egy u -beli blokkon azonos betűk maximális hosszú sorát értjük, azaz blokkok az $a_1^{(p+q)n_1}, a_2^{(p+q)n_2}, \dots, a_k^{(p+q)n_k}$ szavak). Mivel w -ben az alternálások száma legalább 2, így u -ban legalább 3 blokk kell legyen; tekintve tehát az $u' = u_1 u_2^2 u_3 u_4^2 u_5$ szót, azt kapjuk, hogy u' -ben u -hoz képest legalább egy (mondjuk az i .) blokkban több a betűk száma (mert $u_2 u_4 \neq \lambda$), viszont legalább egy (mondjuk a j .) blokkban ugyanannyi. Ez L fenti formája szerint nem lehetséges (ugyanis az i . és a j . blokk hosszának aránya $n_i : n_j$ kellene maradjon). Ellentmondást kaptunk, így sem L , sem $w^{*\sqcup}$ nem környezetfüggetlen. \square

A fenti föltétel nemcsak szükséges, hanem elegendő is. Ennek igazolását egy általánosabb tételben végezzük el, amihez előbb ismét szükséges néhány állítást belátni. Ahhoz, hogy az állításokat ki tudjuk mondani, bevezetjük az alábbi jelöléseket:

3.1. Definíció. Legyen Σ ábécé. Defináljuk minden $i \in \mathcal{N}$ -re a

$$h_i : \Sigma^* \rightarrow (\Sigma \times \mathcal{N})^*$$

homomorfizmust a következőképp: minden $a \in \Sigma$ esetén legyen $h_i(a) = (a, i)$.

A fenti homomorfizmusra akkor lesz szükség, ha valamely L nyelvre és $w \in L^{*\sqcup}$ szóra „nyomon akarjuk követni”, a w szó L -beli „összetevőit”. Továbbá definiáljuk az alábbi homomorfizmust is:

3.2. Definíció. Legyen Σ ábécé. Ekkor a $d : (\Sigma \times \mathcal{N})^* \rightarrow \Sigma^*$ homomorfizmus legyen a következő: minden $a \in \Sigma$ és $i \in \mathcal{N}$ esetén $d((a, i)) = a$.

Ezt a homomorfizmust pedig akkor használjuk, ha az előbbi homomorfizmus-családdal kapott szavakból vissza akarjuk kapni Σ^* -beli megfelelőjüket.

Ahhoz pedig, hogy egy L nyelv és egy $w \in L^{*\sqcup}$ szó esetében tudjunk beszélni a w szó „ i . komponenséről” (ami így messze nem egyértelmű, de ha a h_i homomorfizmusokkal jelölt komponensekről beszélünk, akkor az lesz), definiáljuk az alábbi homomorfizmus-családot is:

3.3. Definíció. Legyen Σ ábécé. Tetszőleges $i \in \mathcal{N}$ esetén legyen

$$s_i : (\Sigma \times \mathcal{N})^* \rightarrow \Sigma^*$$

a következő homomorfizmus: $a \in \Sigma$ és $j \in \mathcal{N}$ esetén

- $s_i((a, j)) = a$, ha $i = j$;
- $s_i((a, j)) = \lambda$, egyébként.

Megjegyzés. A két utolsó definícióban s a *select*, d pedig a *delete* szavak kezdőbetűjéből származik.

Az imént definiált homomorfizmusok és az iterált shuffle között az alábbi összefüggés áll fenn:

3.2. ÁLLÍTÁS. Legyen Σ ábécé, $L \subseteq \Sigma^*$ tetszőleges nyelv, $w \in (\Sigma \times \mathcal{N})^*$ pedig egy szó. Ha minden $i \in \mathcal{N}$ -re $s_i(w) \in L \cup \{\lambda\}$, akkor $d(w) \in L^{*\sqcup}$.

Mivel w pontosan akkor van $L^{*\sqcup}$ -ban, ha szét lehet particionálni diszjunkt L -beli részsavakra, az állítás nyilvánvaló. Továbbá, az alábbi megfordítás is igaz:

3.3. ÁLLÍTÁS. Legyen Σ ábécé, $L \subseteq \Sigma^*$ egy nyelv és $w \in L^{*\sqcup}$ egy szó. Ekkor létezik olyan $w' \in (\Sigma \times \mathcal{N})^*$ szó és $n \in \mathcal{N}$ szám, melyre minden $i \in \mathcal{N}$ esetén $s_i(w') \in L$, ha $i < n$; és $s_i(w') = \lambda$, ha $i \geq n$.

Ezen bevezető definíciók után elkezdhetjük vizsgálni a következő nyelvosztályt. A továbbiakban jelölje $F = \{a^{k_1}b^{n_1}, a^{k_2}b^{n_2}, \dots, a^{k_r}b^{n_r}\}$ az a^+b^+ nyelv tetszőleges véges részhalmazát.

3.4. ÁLLÍTÁS. Legyen $w \in \{a, b\}^*$. $w \in F^{*\sqcup}$ pontosan akkor teljesül, ha létezik olyan $w' \in (\{a, b\} \times \mathcal{N})^*$ szó és $n \in \mathcal{N}$, melyre az alábbiak fennállnak:

- $d(w') = w$;
- $s_i(w') \in F$, ha $i < n$;
- $s_i(w') = \lambda$, ha $i \geq n$;
- tetszőleges $i < j < n$ indexek esetén (b, i) összes előfordulása megelőzi (b, j) összes előfordulását.

Bizonyítás. Ha létezik ilyen w' szó, úgy már az első három feltételből következik, hogy $w \in F^{*\sqcup}$. Az ellentétes irányú tartalmazás igazolásához legyen $w \in F^{*\sqcup}$. Ekkor léteznek olyan $u_0, u_1, \dots, u_{n-1} \in F$ szavak úgy, hogy $w \in u_0 \sqcup u_1 \sqcup \dots \sqcup u_{n-1}$ ($w = \lambda$ esetén $n = 0$ választása adja az üres szorzatot). Ekkor létezik (esetleg több) olyan w' szó, melyre az alábbiak fennállnak:

- $w' \in h_0(u_0) \sqcup h_1(u_1) \sqcup \dots \sqcup h_{n-1}(u_{n-1})$ (azaz $s_0(w') = u_0, s_1(w') = u_1, \dots, s_{n-1}(w') = u_{n-1}$, és minden más i -re $s_i(w') = \lambda$);
- w' -ben az első $(b, 0)$ megelőzi az első $(b, 1)$ -et, az az első $(b, 2)$ -t és így tovább (ezt a shuffle-szorzat kommutativitása miatt tehetjük fel);
- $d(w') = w$.

Legyen egy ilyen $w' \in (\Sigma \times \mathcal{N})^*$ szó esetén $Alt(w') \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ az a halmaz, melyben egy (i, j) elempár pontosan akkor van benne, ha a következő feltételek fennállnak:

- $i < j \leq |w'|$ (azaz i és j pozíciók w' -ben);
- $w'_i = (b, i')$ és $w'_j = (b, j')$ úgy, hogy $i' > j'$.

Legyen w' a fenti tulajdonságú szavak közül egy olyan, melyre $|Alt(w')|$ minimális. Állítjuk, hogy ekkor $Alt(w') = \emptyset$.

Tegyük fel ugyanis, hogy $Alt(w') \neq \emptyset$. Vegyük ekkor azt az $(l, r) \in Alt(w')$ párt, melyre r minimális és ezen belül l maximális. Tekintsük azt a w'' szót, melyet w' -ből kapunk az l . és az r . pozíción álló betűk felcserélésével. Ekkor $|Alt(w'')|$ könnyen láthatóan kisebb, mint $|Alt(w')|$; ha belátjuk tehát, hogy w'' is teljesíti a feltételeket, igazoltuk, hogy $Alt(w') = \emptyset$ valóban fennáll.

Először belátjuk, hogy w'' -re továbbra is fennáll az, hogy ha $i < j < n$, akkor w'' -ben az első (b, i) megelőzi az első (b, j) -t.

Valóban, tegyük fel, hogy w'' nem ilyen: előzze meg az első (b, j) az első (b, i) -t az $i < j$ számokra. Ebből következik, hogy kell legyen olyan i index is, melyre az első $(b, i+1)$ megelőzi az első (b, i) -t. Ekkor a következő esetek lehetségesek:

- Az első (b, i) -t cseréltük az első $(b, i+1)$ -gyel. Ez nem lehet, hiszen $i < i+1$, ez a pár nem volt $Alt(w')$ -ben.
- Az első (b, i) -t a szóban hátrafelé cseréltük, így az első $(b, i+1)$ mögé került. Ekkor egy i -nél kisebb i' -re egy (b, i') betűvel kellett cserélnünk, mely az első $(b, i+1)$ után állt w' -ben. Viszont a cserélendő pár választási stratégiája miatt ekkor semmiképp nem cserélhettük (b, i) -vel $(b, i+1)$ is jó lenne a cserére, és hátrább áll w' -ben). Így ez sem lehetséges.
- Az első $(b, i+1)$ -et cseréltük a szóban egy, az első (b, i) -t megelőző olyan betűvel, mely (b, i') alakú, ahol $i' > i+1$. Ekkor w' -ben az első (b, i') -nek meg kellene előznie az első $(b, i+1)$ -et, ami szintén nem lehetséges.

Tehát w'' -ben továbbra is fennáll, hogy tetszőleges $i < j < n$ esetén az első (b, i) megelőzi az első (b, j) -t.

Most belátjuk azt is, hogy tetszőleges $i < n$ -re az első (b, i) pozíciója ugyanaz w' -ben és w'' -ben is. Tegyük fel ugyanis, hogy nem így van. Ekkor az alábbi esetek lehetségesek:

- Az első (b, i) -t cseréltük ki egy öt megelőző (b, j) -vel, ahol ezek szerint $j > i$. Ekkor az első (b, j) -nek értelemszerűen meg kellene előznie az első (b, i) -t, amiről az előbb megállapítottuk, hogy nem lehetséges.
- Egy (nem az első) (b, i) -t cseréltünk ki egy, az első (b, i) -t megelőző pozíción lévő betűvel (így a szóban előrébb került). Csakhogy ekkor az adott betűvel az első (b, i) -t is kicserélhettük volna; a választási stratégiából következően ekkor az első (b, i) -t kellett volna választanunk (vagy egy még előbb álló betűt). Ez tehát nem lehetséges.
- Az első (b, i) -t cseréltük ki egy, a szóban hátrébb álló betűvel, átugorva a második (esetleg több) (b, i) -t. Ez ismét nem lehet, hiszen a választási stratégia szerint az átugrott betűt kellett volna válasszunk (vagy egy még hátrébb álló betűt). Tehát ez sem lehetséges.

Összefoglalva: a w' -ből kapott w'' -ben minden $0 \leq i < n$ -re az első (b, i) pozíciója

megmaradt. Így tetszőleges $0 \leq i < n$ -re fennáll, hogy az utolsó (a, i) (amit nem cserélhettünk) még mindig megelőzi az első (b, i) -t w'' -ben is; mivel a csere nem változtatja sem az (a, i) , sem a (b, i) betűk számát, így $s_i(w'') = u_i$ továbbra is fennáll. Természetesen $d(w'') = d(w')$ is teljesül, hiszen két olyan betűt cseréltünk ki, melyek d melletti képe megegyezik.

Tehát beláttuk, hogy ha egy, a feltételeket teljesítő w' -re $Alt(w')$ nemüres, akkor megadható olyan w'' szó is, mely szintén teljesíti a feltételeket, és melyre $|Alt(w'')| < |Alt(w')|$. Mivel az $Alt(w')$ halmaz véges minden w' -re, valóban kell létezzen olyan w' , mely teljesíti a feltételeket, és melyre $Alt(w') = \emptyset$. \square

Analóg gondolatmenettel belátható, hogy az (a, i) -k is rendezhetők ebben az értelemben; így végeredményben azt kapjuk, hogy $w \in F^{*\sqcup}$ pontosan akkor teljesül egy $w \in \{a, b\}^*$ szóra, ha van olyan $w' \in (\{a, b\} \times \mathcal{N})^*$ szó és $n \in \mathcal{N}$ konstans, melyekre:

- $s_i(w') \in F$, ha $i < n$;
- $s_i(w') = \lambda$, ha $i \geq n$;
- tetszőleges $i < j < n$ -re bármelyik (a, i) betű megelőzi az összes (a, j) betűt w' -ben;
- tetszőleges $i < j < n$ -re bármelyik (b, i) betű megelőzi az összes (b, j) betűt w' -ben.

Jelöljön $w \in F^{*\sqcup}$ esetén egy hozzá tartozó ilyen tulajdonságú $(\Sigma \times \mathcal{N})^*$ -beli szót (mondjuk a lexikografikusan legkisebbet) \hat{w} .

Ez lehetővé teszi az $F^{*\sqcup}$ -beli szavak nemdeterminisztikus, egyfajta „mohó” módon történő felismerését egy P veremautomatával a következő módon: ha P a betűt olvas, azt beteszi a verembe. Amint elolvassa az első b betűt, nemdeterminisztikusan megsejti, hogy ez melyik $a^i b^j \in F$ -beli szónak az első b betűje (vagyis: mivel lesz egyenlő $s_0(\hat{w})$, ahol w az input szó), a megfelelő számú a -t kiveszi a veremből, és a további $j - 1$ darab b -t (amik megfelelnek a többi $(b, 0)$ -nak \hat{w} -ben) pedig a verem tartalmát nem változtatva olvassa be. Ezután ha találkozik még egy b -vel, ismét megsejti, hogy ez melyik F -beli szó első b -je (hogy mi $s_1(\hat{w})$), és így tovább. A beolvasás végén pontosan akkor ürül ki a verem, ha $w \in F^{*\sqcup}$ valóban fennállt, és a \hat{w} -beli sorrendet is jól sejtettük meg.

A fenti veremautomata formális megadása a következő: $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$, ahol

- $Q = \left[\max_{v \in F} |v|_a \right] \times \left[\max_{v \in F} |v|_b \right]$;
- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\Gamma = \{Z_0, a\}$;
- $q_0 = (0, 0)$;

- végül, δ a következő függvény:
 - $\delta((0, j), a, \gamma) = \{((0, j), a\gamma)\}$ minden $0 \leq j \leq \max_{v \in F} |v|_b$, $\gamma \in \Gamma$ esetén;
 - $\delta((0, j), b, \gamma) = \{(0, j-1), \gamma\}$ minden $0 < j \leq \max_{v \in F} |v|_b$, $\gamma \in \Gamma$ esetén;
 - $\delta((0, 0), b, \gamma) \ni ((i, j-1), \gamma)$ minden $a^i b^j \in F$, $\gamma \in \Gamma$ esetén;
 - $\delta((i, j), \lambda, a) = \{((i-1, j), \lambda)\}$ minden $0 < i \leq \max_{v \in F} |v|_a$, $0 \leq j \leq \max_{v \in F} |v|_b$ esetén;
 - $\delta((0, 0), \lambda, Z_0) = \{((0, 0), \lambda)\}$.

Tehát az eddigiek szerint erre a P veremautomatára $L_\theta(P) = F^{*\sqcup}$.

Eddig tehát beláttuk, hogy ha F véges részhalmaza a^+b^+ -nak, akkor $F^{*\sqcup}$ környezetfüggetlen. Ezt könnyen kiterjeszthetjük a^*b^* -ra is:

3.3. TÉTEL. Ha F véges részhalmaza a^*b^* -nak, akkor $F^{*\sqcup}$ környezetfüggetlen.

Bizonyítás. F ekkor felírható $F = F_1 \cup F_2 \cup F_3$ alakban, ahol:

- $F_1 \subseteq a^+b^+$;
- $F_2 \subseteq a^*$;
- $F_3 \subseteq b^*$.

Ekkor

$$F^{*\sqcup} = (F_1 \cup F_2 \cup F_3)^{*\sqcup} = F_1^{*\sqcup} \sqcup F_2^{*\sqcup} \sqcup F_3^{*\sqcup}.$$

Azt már láttuk, hogy $F_1^{*\sqcup}$ környezetfüggetlen; mivel $F_2^{*\sqcup} = F_2^*$ és $F_3^{*\sqcup} = F_3^*$ (ugyanis ábécéjük egyelemű), e két nyelv reguláris. Mivel pedig a környezetfüggetlen nyelvek osztálya zárt a reguláris nyelvvel való shuffle-szorozásra, így $F^{*\sqcup}$ valóban környezetfüggetlen. \square

3.3. KÖVETKEZMÉNY. Tetszőleges $w \in a^*b^*$ szóra $w^{*\sqcup}$ környezetfüggetlen.

Maradva a^*b^* véges részhalmazainál, vizsgáljuk most azt, hogy milyen feltételek mellett lesz shuffle-iteráltjuk reguláris! Erre a kérdésre az alábbi szükséges és elégséges feltételt adjuk:

3.4. TÉTEL. Legyen $F \subseteq a^*b^*$ véges nyelv. $F^{*\sqcup}$ pontosan akkor reguláris, ha az alábbi feltételek valamelyike fennáll:

- $a^+b^+ \cap F = \emptyset$;
- $a^+ \cap F$ és $b^+ \cap F$ egyike sem üres.

Bizonyítás. Amennyiben $a^+b^+ \cap F = \emptyset$, természetesen $F^{*\sqcup}$ reguláris: ekkor F felírható $F = F_1 \cup F_2$ formában, ahol $F_1 \subseteq a^*$ és $F_2 \subseteq b^*$. Így $F^{*\sqcup} = F_1^{*\sqcup} \sqcup F_2^{*\sqcup}$, ami ismét két reguláris nyelv shuffle-szorzata, így reguláris.

Amennyiben $a^+ \cap F$ és $b^+ \cap F$ egyike sem üres, úgy létezik $i, j > 0$ úgy, hogy $a^i \in F$ és $b^j \in F$. Írjuk fel F -et $F_1 \cup F_2 \cup F_3$ alakban, ahol $F_1 \subseteq a^+b^+$, $F_2 \subseteq a^*$ és $F_3 \subseteq b^*$. Tekintsünk egy $a^lb^r \in F_1$ szót. Mivel

$$(a^lb^r)^{(ij)\sqcup} \subseteq (a^l)^{(ij)\sqcup} \sqcup (b^r)^{(ij)\sqcup} \subseteq (a^i)^* \sqcup (b^j)^*,$$

így

$$(a^lb^r)^{* \sqcup} \subseteq (a^lb^r)^{(\leq ij)\sqcup} \sqcup F_2^{* \sqcup} \sqcup F_3^{* \sqcup}$$

fennáll. Ebből következően $F_1^{* \sqcup} \subseteq (F_1)^{(\leq |F_1|ij)\sqcup} \sqcup F_2^{* \sqcup} \sqcup F_3^{* \sqcup}$. Ezt visszahelyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F^{* \sqcup} &= F_1^{* \sqcup} \sqcup F_2^{* \sqcup} \sqcup F_3^{* \sqcup} \subseteq (F_1)^{(\leq |F_1|ij)\sqcup} \sqcup F_2^{* \sqcup} \sqcup F_3^{* \sqcup} \sqcup F_2^{* \sqcup} \sqcup F_3^{* \sqcup} = \\ &= ((F_1)^{(\leq |F_1|ij)\sqcup} \sqcup F_2^{* \sqcup} \sqcup F_3^{* \sqcup}) \subseteq F^{* \sqcup}. \end{aligned}$$

Így a teljes $F^{* \sqcup}$ előáll $((F_1)^{(\leq |F_1|ij)\sqcup} \sqcup F_2^{* \sqcup} \sqcup F_3^{* \sqcup})$ alakban – az első tényező reguláris nyelv véges shuffle-szorzatainak véges uniója, ami reguláris; a másik két tényező pedig egybetűs ábécé feletti nyelvek shuffle-iteráltja, ami reguláris. Mivel a reguláris nyelvek zártak a shuffle-szorzásra és a véges unió képzésére, kapjuk, hogy $F^{* \sqcup}$ valóban reguláris.

Az elegendőséget tehát beláttuk; most igazoljuk a feltételek szükségességét. Tegyük fel tehát, hogy $a^+b^+ \cap F \neq \emptyset$ és (mondjuk) $a^+ \cap F = \emptyset$. Ekkor tehát létezik az $\epsilon := \min_{u \in F} \frac{|u|_b}{|u|_a}$ hányados, mely pozitív (itt a 0 nevezőjű törtek értéke, beleértve a $\frac{0}{0}$ -t is, ∞): mivel van a^+b^+ -beli szó, a hányados véges és mert minden a -t tartalmazó szóban van b is, így a minimum nem 0.

Ebből következik, hogy – mivel $F^{* \sqcup}$ betűekvivalens F^* -gal – ugyanez az ϵ a minimuma az $F^{* \sqcup}$ -beli u szavak esetében is az $\frac{|u|_b}{|u|_a}$ hányadosnak.

Ismét alkalmazzuk a pumpáló lemmát $L = F^{* \sqcup} \cap a^*b^*$ -ra (ami végtelen nyelv, hiszen $a^+b^+ \cap F \neq \emptyset$). Tegyük fel, hogy L reguláris. Legyen $N \in \mathcal{N}$ a pumpáló lemma szerint ekkor létező olyan konstans, melyre tetszőleges $u \in L$ -re ha $|u| > N$, akkor u felírható $u = u_1u_2u_3$ alakban úgy, hogy $|u_1u_2| < N$, $u_2 \neq \lambda$, és minden $i \in \mathcal{N}$ -re $u_1u_2^iu_3 \in L$.

Legyen $a^lb^r \in F \cap (a^+b^+)!$ Ekkor $u = a^{lN}b^{rN}$ eleget tesz a feltételeknek; viszont tetszőleges $u = u_1u_2u_3$ felírást tekintve, melyre $|u_1u_2| < N$, az u_2 szó a^+ -beli kell legyen. Ekkor viszont tekintve az $u^{(i)} := u_1u_2^iu_3$ szavakat, azt kapjuk, hogy $\lim_{i \rightarrow \infty} |u^{(i)}|_a = \infty$, miközben $|u^{(i)}|_b$ konstans. Így tehát létezik olyan $u^{(i)}$, melyre $\frac{|u^{(i)}|_b}{|u^{(i)}|_a} < \epsilon$, és így ez az $u^{(i)}$ nem lehet L -beli. Ellentmondást kaptunk tehát, amiből következik, hogy sem L , sem $F^{* \sqcup}$ nem reguláris. \square

Megjegyzés. A másik eset (amikor is $F \cap a^+b^+ \neq \emptyset$ és $F \cap b^+ = \emptyset$) bizonyítása analóg, azzal a különbséggel, hogy nemcsak a hányadosokat kell megfordítani, hanem a pumpáló lemma azon változatát kell alkalmazni, amikor is az $|u_1u_2| < N$ feltétel helyett az $|u_2u_3| < N$ feltétel szerepel.

4. Kommutatív nyelvek

Mivel tetszőleges kommutatív nyelvekre igaz, hogy shuffle-szorzatuk a legszűkebb kommutatív nyelv, mely tartalmazza konkatenáltjukat, továbbá tetszőleges kommutatív nyelv shuffle-iteráltja a legszűkebb kommutatív nyelv, mely tartalmazza a nyelv Kleene-iteráltját, erős kapcsolat áll fenn a kommutatív nyelvek és a shuffle műveletek között. Ezért e fejezetben kommutatív reguláris nyelvek shuffle-iteráltját vizsgáljuk. Annak eldöntésére, hogy egy adott L kommutatív nyelv shuffle-iteráltja pontosan mikor reguláris, már ismert algoritmus, lásd [4, 7]. Azonban bizonyos szűkebb nyelvosztályokra sikerült könnyen ellenőrizhető feltételeket adni; továbbá vannak környezetfüggetlenséget biztosító feltételeink is.

A legegyszerűbb kommutatív nyelvek (\emptyset és $\{\lambda\}$ után) azok, melyek valamely egyszavas nyelv kommutatív lezártjaként allnak elő.

Az alábbi állítás igaz kommutatív nyelvekre:

4.1. ÁLLÍTÁS. Legyen Σ ábécé, $L \subseteq \Sigma^*$ kommutatív nyelv és $x \in \Sigma^*$ szó. Az $x \in L^{*\sqcup}$ tartalmazás pontosan akkor áll fenn, ha léteznek $u_1, \dots, u_n \in L$ szavak úgy, hogy $\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \Phi(u_i)$.

Bizonyítás. Ha $w \in L^{*\sqcup}$, akkor $w \in u_1 \sqcup \dots \sqcup u_n$ valamely $u_1, \dots, u_n \in L$ szavakra. Ekkor természetesen $\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \Phi(u_i)$ is fennáll. A másik irány bizonyítását n szerinti indukcióval végezzük el:

- Ha $n = 0$, azaz $\Phi(x) = \underline{0}$, úgy $x = \lambda$ és ekkor $x \in L^{*\sqcup}$ bármely L -re igaz.
- Ha $n = 1$, azaz $\Phi(x) = \Phi(u_1)$ valamely $u_1 \in L$ -re, akkor L kommutativitása miatt igaz az állítás.
- Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden olyan szóra, melynek Parikh-képe felírható legfeljebb n darab L -beli szó Parikh-képének összegeként. Legyen $x \in \Sigma^*$ -ra $\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \Phi(u_i)$ valamely $u_1, \dots, u_{n+1} \in L$ szavakra. Ekkor x felbontható két diszjunkt részszóra, x_1 -re és x_2 -re úgy, hogy $\Phi(x_1) = \sum_{i=1}^n \Phi(u_i)$ és $\Phi(x_2) = \Phi(u_{n+1})$. Az indukciós feltevés szerint ekkor $x_1 \in L^{*\sqcup}$ és $x_2 \in L^{*\sqcup}$ is fennáll. Mivel így x felbomlik két $L^{*\sqcup}$ -beli részszóra, így $x \in L^{*\sqcup} \sqcup L^{*\sqcup} = L^{*\sqcup}$ is fennáll. \square

Speciálisan ha $L = \Phi^{-1}\Phi(w)$ valamely w -re, ezt az állítást a következő formában mondhatjuk ki:

4.2. ÁLLÍTÁS. Legyen Σ ábécé és $x, w \in \Sigma^*$. Az $x \in (\Phi^{-1}\Phi(w))^{*\sqcup}$ tartalmazás pontosan akkor áll fenn, ha $\Phi(x) = k\Phi(w)$ valamely $k \in \mathcal{N}$ -re.

Ezt felhasználva a következő eredmény született:

4.1. TÉTEL. Legyen w tetszőleges szó. $(\Phi^{-1}\Phi(w))^{\ast\sqcup}$ pontosan akkor reguláris, ha $|\text{Alph}(w)| \leq 1$.

Bizonyítás. Amennyiben $|\text{Alph}(w)| \leq 1$, úgy $w \in a^*$ valamely a betűre; erre

$$(\Phi^{-1}\Phi(w))^{\ast\sqcup} = \{w\}^{\ast\sqcup},$$

amire már láttuk, hogy reguláris nyelv.

Legyen $w \in a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}$ valamely a_1, \dots, a_k betűkre, ahol $a_i \neq a_{i+1}$ semmilyen $1 \leq i < k$ esetén, $k > 1$; és az n_i kitevők pozitívak, minden $1 \leq i \leq k$ esetén. Tegyük fel, hogy $L = (\Phi^{-1}\Phi(w))^{\ast\sqcup}$ reguláris nyelv, és legyen N a pumpáló lemma állításában szereplő, L -re jellemző konstans! Tekintsük az

$$u = a_1^{Nn_1} a_2^{Nn_2} \dots a_k^{Nn_k} \in L$$

szót. Mivel $|u| > N$, a pumpáló lemma szerint u felírható $u = u_1 u_2 u_3$ alakban úgy, hogy $|u_1 u_2| < N$, $u_2 \neq \lambda$, és minden $i > 0$ esetén $u_1 u_2^i u_3 \in L$ is fennáll. Vegyük észre, hogy itt u_2 csak a_1 betűket tartalmazhat. Tekintve az $u_1 u_2^i u_3$ szót, azt látjuk, hogy u -hoz képest csak a_1 betűből tartalmaz többet, így nem lehet, hogy $\Phi(u)$ és $\Phi(u_1 u_2^i u_3)$ egyszerre legyen $k\Phi(w)$ alakú (hiszen w tartalmaz $a_2 \neq a_1$ betűt is). Tehát $u_1 u_2^i u_3 \notin L$; ezzel ellentmondást kaptunk, és így beláttuk, hogy L tényleg nem reguláris nyelv. \square

Ugyanezen nyelvekre a környezetfüggetlenséggel kapcsolatosan egy hasonló eredmény áll fenn:

4.2. TÉTEL. Legyen w tetszőleges szó. $(\Phi^{-1}\Phi(w))^{\ast\sqcup}$ pontosan akkor környezetfüggetlen, ha $|\text{Alph}(w)| \leq 2$.

Bizonyítás. Legyen $\text{Alph}(w) = \{a_1, \dots, a_k\}$, ahol $k > 2$. Vegyük először is az

$$L_1 = (\Phi^{-1}\Phi(w))^{\ast\sqcup} \cap a_1^* a_2^* \dots a_k^*$$

nyelvet. Erre a nyelvre

$$L_1 = \left\{ a_1^{n|w|_{a_1}} a_2^{n|w|_{a_2}} \dots a_k^{n|w|_{a_k}} : n \in \mathcal{N} \right\}.$$

Alkalmazzuk most L_1 -re azt a

$$h : \{a_1, \dots, a_k\}^* \rightarrow \{a_1, a_2, a_3\}^*$$

homomorfizmust, melyre

$$h(a_1) = a_1, \quad h(a_2) = a_2, \quad h(a_3) = a_3,$$

és minden $i > 3$ esetben $h(a_i) = \lambda$. Ezután $h(L_1)$ -re alkalmazzuk azon h_2 homomorfizmus inverzét, melyre $h_2(a_i) = a_i^{|w|_{a_i}}$, minden $1 \leq i \leq 3$ esetben. Ekkor

$$h_2^{-1}h(L_1) = \{a_1^n a_2^n a_3^n : n \in \mathcal{N}\},$$

ami ismerten nem környezetfüggetlen nyelv. Mivel pedig a reguláris nyelvvel való metszés, a homomorfizmus alkalmazása és az inverz homomorfizmus képzése mind olyan műveletek, melyekre a környezetfüggetlen nyelvek osztálya zárt, így az eredeti $(\Phi^{-1}\Phi(w))^{\ast\sqcup}$ nyelv sem környezetfüggetlen.

Az elegendőség igazolásához az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\text{Alph}(w) = \{a, b\}$ (ha $\text{Alph}(w) < 2$, úgy a nyelv reguláris, tehát környezetfüggetlen). Legyen $|w|_a = n$, $|w|_b = m$. Ekkor

$$L = (\Phi^{-1}\Phi(w))^{\ast\sqcup} = \{x : m|x|_a = n|x|_b\}.$$

Ezt a nyelvet pedig fel lehet ismerni egy olyan veremautomatával, mely vermét mint egészértékű számlálót használja úgy, hogy a beolvasásakor m -mel növeli a számláló értékét, b beolvasásakor pedig n -nel csökkenti; ha a szónak vége és a számláló értéke 0, felismeri, egyébként elveti azt. A következő veremautomata így működik: $P = (Q, \{a, b\}, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$, ahol:

- $Q = \{-n, -n+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, m\}$;
- $q_0 = 0$;
- $\Gamma = \{Z_0, a, b\}$;
- a δ átmenetfüggvény pedig a következő:
 - $\delta(0, a, \gamma) = \{(m, \gamma)\}$ minden $\gamma \in \Gamma$ esetén;
 - $\delta(0, b, \gamma) = \{(-n, \gamma)\}$ minden $\gamma \in \Gamma$ esetén;
 - $\delta(i, \lambda, b) = \{(i-1, \lambda)\}$ minden $i > 0$ esetén;
 - $\delta(i, \lambda, \gamma) = \{(i-1, a\gamma)\}$ minden $i > 0$, $\gamma \in \{a, Z_0\}$ esetén;
 - $\delta(i, \lambda, a) = \{(i+1, \lambda)\}$ minden $i < 0$ esetén;
 - $\delta(i, \lambda, \gamma) = \{(i+1, b\gamma)\}$ minden $i < 0$, $\gamma \in \{b, Z_0\}$ esetén;
 - $\delta(0, \lambda, Z_0) = \{(0, \lambda)\}$.

A verem a következőképpen reprezentálja a kívánt számlálót: ha a verem tartalma $a^n Z_0$, akkor értéke n ; ha $b^n Z_0$, akkor értéke $-n$. Látható, hogy P csak a 0 állapotban olvashat be betűt; az is látható, hogy ha P egy $i < 0$ állapotba kerül, akkor i -vel csökkentve a számláló értékét kerül vissza a 0 állapotba, ha pedig egy $i > 0$ állapotba kerül, akkor i -vel növeli a számlálót, és úgy kerül vissza a 0 állapotba. Továbbá mivel a betű olvasásakor eszerint m -mel növeli, b olvasásakor pedig n -nel csökkenti a számláló értékét, valóban a kívánt módon kezeli a számlálóját. Amennyiben felismeri az x szót (ez pontosan akkor következik be, ha a szó elolvasása után kiveszi a veremből az egyetlen ott lévő szimbólumot, Z_0 -t), úgy a számláló értéke 0 kell legyen x végigolvasása után. Ez valóban megfelel annak, hogy $m|x|_a = n|x|_b$.

Tehát $L_\emptyset(P) = L$, azaz L tényleg környezetfüggetlen. □

A kommutatív nyelvek osztályán belüli osztályokat alkotnak a lokálisan $(1, m)$ -küszöbtesztelhető (vagy *kommutatív csillagmentes*) nyelvek; a továbbiakban ezekkel foglalkozunk. Innen úgy tekintjük, hogy $\Sigma = \{a_1, \dots, a_k\}$ adott.

4.1. Definíció. Legyen $m \in \mathcal{N}$. Defináljuk a $\Phi_m : \Sigma^* \rightarrow \mathcal{N}^k$ függvényt a következőképpen: tetszőleges w szóra $\Phi_m(w)[i]$ (azaz a $\Phi_m(w)$ vektor i . koordinátája) legyen $\min \{m, \Phi(w)[i]\}$.

4.2. Definíció. Egy $L \subseteq \Sigma^*$ kommutatív nyelv lokálisan $(1, m)$ -küszöbtesztelhető, ha megadhatók olyan $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{N}^k$ vektorok, melyekre tetszőleges $w \in \Sigma^*$ esetén $w \in L$ pontosan akkor áll fenn, ha valamely $1 \leq i \leq n$ esetén $\Phi_m(w) = v_i$.

4.3. Definíció. A lokálisan $(1, 1)$ -küszöbtesztelhető nyelveket lokálisan 1-tesztelhető nyelveknek is nevezzük.

A lokálisan 1-tesztelhető nyelvekre igaz az alábbi állítás:

4.3. ÁLLÍTÁS. Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv pontosan akkor lokálisan 1-tesztelhető, ha megadhatóak $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n \subseteq \Sigma$ ábécék úgy, hogy tetszőleges $w \in \Sigma^*$ szó pontosan akkor van benne L -ben, ha valamely $1 \leq i \leq n$ -re $\text{Alph}(w) = \Sigma_i$.

Jelölje $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ esetén L_{Σ_1} azt a nyelvet, melyben pontosan azok a szavak vannak, amiknek ábécéje Σ_1 . Azaz:

$$L_{\Sigma_1} = \bigcap_{a \in \Sigma_1} \Sigma_1^* a \Sigma_1^*;$$

láthatóan minden L_{Σ_1} alakú nyelv reguláris.

Igaz továbbá, hogy tetszőleges $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ -ra $L_{\Sigma_1} \sqcup L_{\Sigma_1} \subseteq L_{\Sigma_1}$, hiszen ha két olyan szót fésülünk össze, melyeknek ábécéje Σ_1 , egy olyan szót kapunk, melynek ábécéje ismét Σ_1 .

Ebből következően $L_{\Sigma_1}^{*\sqcup} = \{\lambda\} \cup L_{\Sigma_1}$, tetszőleges $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ esetén.

Az eddigiekből kapjuk az alábbi egyszerű eredményt:

4.4. ÁLLÍTÁS. Tetszőleges L lokálisan 1-tesztelhető nyelv shuffle-iteráltja reguláris.

Bizonyítás. Legyen

$$L = L_{\Sigma_1} \cup L_{\Sigma_2} \cup \dots \cup L_{\Sigma_n}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} L^{*\sqcup} &= L_{\Sigma_1}^{*\sqcup} \sqcup L_{\Sigma_2}^{*\sqcup} \sqcup \dots \sqcup L_{\Sigma_n}^{*\sqcup} = \\ &= (L_{\Sigma_1} \cup \{\lambda\}) \sqcup (L_{\Sigma_2} \cup \{\lambda\}) \sqcup \dots \sqcup (L_{\Sigma_n} \cup \{\lambda\}), \end{aligned}$$

azaz előáll reguláris nyelvekből a véges unió képzésével és a shuffle-szorzással; mivel a reguláris nyelvek osztálya zárt ezen műveletekre, így $L^{*\sqcup}$ reguláris. \square

Ennél azonban erősebb összefüggést is kimondhatunk, amihez az alábbi állítás szükséges:

4.5. ÁLLÍTÁS. Ha $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n \subseteq \Sigma$, akkor $L = L_{\Sigma_1} \sqcup \dots \sqcup L_{\Sigma_n}$ lokálisan $(1, n)$ -különböztelhető nyelv.

Bizonyítás. Legyen minden $1 \leq i \leq n$ esetén v_i a Σ_i halmaz karakterisztikus vektora (azaz $v_i[j] = 1$, ha $a_j \in \Sigma_i$, egyébként $v_i[j] = 0$). Legyen $v = \sum_{i=1}^n v_i$. Állítjuk, hogy L pontosan azon w szavakat tartalmazza, melyekre minden $1 \leq i \leq k$ esetén:

- vagy $v[i] = 0$ és $|w|_{a_i} = 0$;
- vagy $v[i] > 0$ és $|w|_{a_i} \geq v[i]$.

Ennek bizonyítását teljes indukcióval végezzük n szerint:

- Ha $n = 0$, akkor L csak λ -t tartalmazza, és ez minden i -re megfelel a $v[i] = 0$ és $|\lambda|_{a_i} = 0$ eseteknek.
- Ha $n = 1$, akkor egyetlen $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ -ről van szó; ekkor v minden koordinátáján a 0 vagy 1 érték szerepel, és épp az L_{Σ_1} definíciójában szereplő feltételeket kapjuk.
- Tegyük föl, hogy az állítás igaz n -ig. Legyen $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{n+1} \subseteq \Sigma$, és tegyük fel, hogy $w \in L_{\Sigma_1} \sqcup \dots \sqcup L_{\Sigma_{n+1}}$. Ekkor w két diszjunkt részszóra, w_1 -re és w_2 -re bontható úgy, hogy $w_1 \in L_{\Sigma_1} \sqcup \dots \sqcup L_{\Sigma_n}$ és $w_2 \in L_{\Sigma_{n+1}}$. Vizsgáljuk meg minden $1 \leq i \leq k$ koordináta esetén $v[i]$ és $|w|_{a_i}$ viszonyát! Az alábbi esetek lehetségesek (ismét v_j jelöli Σ_j karakterisztikus vektorát):
 - Ha $\sum_{j=1}^n v_j[i] = 0$ és $v_{n+1}[i] = 0$, akkor $|w_1|_{a_i} = 0$ (indukciós feltevés szerint) és $|w_2|_{a_i} = 0$ ($L_{\Sigma_{n+1}}$ definíciója szerint); ekkor $v[i] = 0$ és $|w|_{a_i} = 0$, az állítás igaz.
 - Ha $\sum_{j=1}^n v_j[i] = 0$ és $v_{n+1}[i] = m > 0$, akkor $|w_1|_{a_i} = 0$ (indukciós feltevés szerint) és $|w_2|_{a_i} \geq m$ ($L_{\Sigma_{n+1}}$ definíciója szerint); ekkor $v[i] = m > 0$ és $|w|_{a_i} \geq m$, az állítás igaz.
 - Ha $\sum_{j=1}^n v_j[i] = m > 0$ és $v_{n+1}[i] = 0$, akkor $|w_1|_{a_i} \geq m$ (indukciós feltevés szerint) és $|w_2|_{a_i} = 0$ ($L_{\Sigma_{n+1}}$ definíciója szerint); ekkor $v[i] = m > 0$ és $|w|_{a_i} \geq m$, az állítás igaz.
 - Ha $\sum_{j=1}^n v_j[i] = m_1 > 0$ és $v_{n+1}[i] = m_2 > 0$, akkor $|w_1|_{a_i} \geq m_1$ (indukciós feltevés szerint) és $|w_2|_{a_i} \geq m_2$ ($L_{\Sigma_{n+1}}$ definíciója szerint); ekkor $v[i] = m_1 + m_2 > 0$ és $|w|_{a_i} \geq m_1 + m_2$, az állítás igaz.

Azaz beláttuk, hogy ha $w \in L$, akkor valóban állnak rá a feltételek.

Tegyük most fel, hogy w Parikh-képe megfelelő, azaz

$$\Phi(w) \geq v = \sum_{j=1}^{n+1} v_j,$$

és mindahányszor $v[i] = 0$, $\Phi(w) = 0$ is fennáll. Bontsuk Σ_{n+1} -et két diszjunkt részhalmaz uniójára, $S_1 \cup S_2$ -re a következőképp: legyen

$$S_1 = \left(\bigcup_{i=1}^n \Sigma_i \right) \cap \Sigma_{n+1}$$

és $S_2 = \Sigma_{n+1} \setminus S_1$. Bontsuk most w -t két diszjunkt részcsozára, w_1 -re és w_2 -re úgy, hogy w_2 minden S_1 -beli betűből pontosan 1-et tartalmazzon, és tartalmazzon az összes S_2 -beli betűt! Könnyen látható, hogy $w_2 \in L_{\Sigma_{n+1}}$ fennáll; tekintve a $v' = \sum_{j=1}^n v_j$ vektort, igaz, hogy $\Phi(w_1)[i] \geq v'[i]$ minden $1 \leq i \leq k$ -ra, és ha $v'[i] = 0$, akkor $\Phi(w_1)[i] = 0$, ugyanis:

- ha $a_i \notin \Sigma_{n+1}$, akkor $v[i] = v'[i]$ és w_2 -be sem került egyetlen a_i sem a konstrukció miatt, így az egyenlőség fennáll;
- ha $a_i \in \Sigma$ és $a_i \notin \bigcup_{j=1}^n \Sigma_j$, akkor az összes a_i betű w_2 -be kerül; ekkor $v'[i] = 0$ és $|w_1|_{a_i} = 0$;
- egyébként w_2 -be pontosan egy a_i kerül, azaz $|w_1|_{a_i} = |w|_{a_i} - 1$; mivel $v_{n+1}[i] = 1$ ekkor, így $v'[i] = v[i] - 1$ is fennáll; és mivel $a_i \in \bigcup_{j=1}^n \Sigma_j$, így $v'[i] > 0$ is fennáll; összegezve $v'[i] > 0$ és $|w_1|_{a_i} \geq v'[i]$.

Mindezekből következően w_1 -re az indukciós feltevés miatt valóban mondhatjuk, hogy $w_1 \in L_{\Sigma_1} \sqcup \dots \sqcup L_{\Sigma_n}$, továbbá hogy $w_2 \in L_{\Sigma_{n+1}}$, így valóban, $w \in L$. \square

Az állítás következménye pedig:

4.1. KÖVETKEZMÉNY. Ha $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n \subseteq \Sigma$, akkor $L_{\Sigma_1} \sqcup L_{\Sigma_2} \sqcup \dots \sqcup L_{\Sigma_n}$ egy lokálisan $(1, n)$ -küszöbtesztelhető nyelv.

Mivel lokálisan $(1, n)$ -küszöbtesztelhető nyelvek uniója is lokálisan $(1, n)$ -küszöbtesztelhető, és felhasználva, hogy a Σ ábécének legfeljebb $2^{|\Sigma|}$ különböző részhalmaza lehet, kapjuk az alábbi, a regularitásnál erősebb állítást:

4.6. ÁLLÍTÁS. Tetszőleges $L \subseteq \{a_1, \dots, a_k\}^*$ lokálisan 1-tesztelhető nyelvre igaz, hogy L^{\sqcup} egy lokálisan $(1, 2^k)$ -küszöbtesztelhető nyelv.

Megjegyzés. A korlát nem éles; valójában ha $k > 1$, bebizonyítható, hogy L^{\sqcup} egy lokálisan $(1, k - 1)$ -küszöbtesztelhető nyelv (ez már egy éles korlát).

A lokálisan 1-tesztelhető nyelvek után most egy olyan kommutatív reguláris nyelvosztályt vizsgálunk, mely abból a szempontból „érdekesebb”, mint az eddigiek, hogy zárt a shuffle-iterált képzésére.

4.4. Definíció. Legyen $\Sigma = \{a_1, \dots, a_k\}$ és $N > 0$. Defináljuk az $N - MOD$ nyelvosztályt a következőképp: egy L nyelv pontosan akkor legyen benne $N - MOD$ -ban, ha létezik $\underline{c} \in \mathcal{N}^k$ vektor úgy, hogy

$$L = \{w \in \Sigma^* : \Phi(w) = \underline{c} + \lambda_1 N e_1 + \lambda_2 N e_2 + \dots + \lambda_k N e_k\}$$

valamely $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$ -ra. Itt e_i az i -edik egységvektort jelenti. Ekkor azt is mondjuk, hogy \underline{c} az L nyelv *bázisa*.

4.5. Definíció. Legyen $N \in \mathcal{N}$ esetén $N - \mathcal{UMOD}$ az $N - MOD$ osztály véges unióképzésre vett lezártja.

Ezen nyelvosztályokkal kapcsolatban kimondunk néhány állítást.

4.7. ÁLLÍTÁS. Legyen $N \in \mathcal{N}$ és K, L egy-egy $N - MOD$ nyelv; K bázisa legyen \underline{c} , L bázisa pedig \underline{d} . Ekkor $K \sqcup L$ is $N - MOD$ nyelv, bázisa $\underline{c} + \underline{d}$.

Bizonyítás. Legyen $w \in u \sqcup v$ az $u \in K$, $v \in L$ szavakra. Ekkor

$$\Phi(u) = \underline{c} + NI\nu \text{ és } \Phi(v) = \underline{d} + NI\mu$$

valamely $\nu, \mu \in \mathcal{N}^k$ vektorokra (itt I a k -dimenziós egységmátrix). Tehát

$$\Phi(w) = \underline{c} + NI\nu + \underline{d} + NI\mu = \underline{c} + \underline{d} + NI(\nu + \mu),$$

és ekkor valóban fennáll, hogy w benne van az adott bázisú $N - MOD$ nyelvben. Ha pedig w benne van e nyelvben, úgy $\Phi(w) = \underline{c} + \underline{d} + NI(\mu)$ valamely $\mu \in \mathcal{N}^k$ -ra; ekkor szétbontható két diszjunkt részszoóra, w_1 -re és w_2 -re úgy, hogy $\Phi(w_1) = \underline{c}$ (és így $w_1 \in K$), és $\Phi(w_2) = \underline{d} + NI\mu$ (azaz $w_2 \in L$). \square

Ennek az egyszerű állításnak a következménye:

4.2. KÖVETKEZMÉNY. Ha L egy $N - MOD$ nyelv a \underline{c} bázissal, akkor

$$L^{(N+1)\sqcup} \subseteq L.$$

Bizonyítás. Az előző állítás szerint ekkor $L^{(N+1)\sqcup}$ is egy $N - MOD$ nyelv, az $(N+1)\underline{c}$ bázissal. Csakhogy ha $\Phi(w) = (N+1)\underline{c} + NI\mu$ valamely $\mu \in \mathcal{N}^k$ -ra, akkor $N\underline{c}$ -t kiemelve $\Phi(w) = \underline{c} + NI(\mu + \underline{c})$, azaz $w \in L$ is fennáll.

Ebből az eredményből következik, hogy ha $L \in N - MOD$, akkor

$$L^{*\sqcup} = \bigcup_{i=0}^N L^{i\sqcup}, \text{ vagyis } L^{*\sqcup} \in N - \mathcal{UMOD}.$$

Legyen most $L \in N - \mathcal{UMOD}$ tetszőleges! Ekkor L felírható

$$L = \bigcup_{i=0}^n L_i$$

alakban valamely $n \geq 0$ -ra és $L_1, \dots, L_n \in N - \mathcal{MOD}$ nyelvekre. Felírva és kifejtve L shuffle-iteráltját, kapjuk, hogy

$$L^{*\sqcup} = \left(\bigcup_{i=0}^n L_i \right)^{*\sqcup} = \bigsqcup_{i=1}^n L_i^{*\sqcup}.$$

□

Az előzőek szerint az $L_i^{*\sqcup}$ nyelvek $N - \mathcal{UMOD}$ -beliek, azaz felírhatóak

$$L_i = \bigcup_{j=0}^{n_i} L_{i,j}$$

alakban. Erre a disztributivitást alkalmazva

$$\bigsqcup_{i=1}^n L_i^{*\sqcup} = \bigsqcup_{i=1}^n \bigcup_{j=0}^{n_i} L_{i,j} = \bigcup_{\substack{1 \leq i_j \leq n_j \\ \text{minden } 1 \leq j \leq n\text{-re}}} \bigsqcup_{j=1}^n L_{j,i_j}.$$

Az unióban $N - \mathcal{MOD}$ -beli nyelvek véges shuffle-szorzatai állnak, amik szintén $N - \mathcal{MOD}$ -beli nyelvek; így $L^{*\sqcup}$ végeredményben $N - \mathcal{MOD}$ -beli nyelvek véges uniójaként áll elő, azaz $L^{*\sqcup} \in N - \mathcal{UMOD}$.

Így igazoltuk a következőt:

4.8. ÁLLÍTÁS. *Tetszőleges $N \in \mathcal{N}$ -re $N - \mathcal{UMOD}$ zárt a shuffle-iterált és a shuffle-szorzás műveletekre.*

Hivatkozások

- [1] T. ARAKI, Y. TSUJINO, N. TOKURA: *Descriptive power of flow expressions and event expressions*. Systems, Computers, Controls 11 (1980) 76–83
- [2] T. ARAKI, N. TOKURA: *Decision problems for regular expressions with shuffle and shuffle closure operators*. Systems, Computers, Controls 12 (1981) 1069–1073
- [3] Z. ÉSIK, I. SIMON: *Modeling literal morphisms by shuffle*. Semigroup Forum 56 (1998) 225–227
- [4] P. GOHON: *An algorithm to decide whether a rational subset of N^k is recognizable*. Theoretical Computer Science 41 (1985) 51–59

- [5] Y. HIRSHFELD: *Undecidability of language equivalence for generalized regular expressions*. Fundamenta Informaticae **26** (1996) 95–102
- [6] J. E. HOPCROFT, J. D. ULLMAN: *Introduction to automata theory, languages and computation*. Addison-Wesley (1979)
- [7] B. IMREH, M. ITO, M. KATSURA: *On shuffle closures of commutative regular languages*. Proceedings of DMTS'96, Combinatorics, Complexity, and Logic. Springer-Verlag (1997)
- [8] K. IWAMA: *The universe problem for unrestricted flow languages*. Acta Informatica **19** (1983) 85–96
- [9] M. JANTZEN: *The power of synchronizing operations on strings*. Theoretical Computer Science **14** (1981) 127–154
- [10] J. JĘDRZEJOWICZ: *Infinite hierarchy of expressions containing shuffle closure operator*. Information Processing Letters **28** (1988) 33–37
- [11] J. JĘDRZEJOWICZ: *An undecidable problem for shuffle languages*. Developments in Language Theory II (1995) 112–118
- [12] J. JĘDRZEJOWICZ: *Undecidability results for shuffle languages*. Journal of Automata, Languages and Combinatorics **1** (1996) 147–159
- [13] J. JĘDRZEJOWICZ, A. SZEPIETOWSKI: *Shuffle languages are in P*. Theoretical Computer Science **250** (2001) 31–53
- [14] J. E. PIN: *Varieties of formal languages*. Plenum (1986)
- [15] T. SHOUDAI: *A P-complete language describable with iterated shuffle*. Information Processing Letters **41** (1992) 233–238
- [16] M. K. WARMUTH, D. HAUSSLER: *On the complexity of iterated shuffle*. Journal of Computer and System Sciences **28** (1984) 345–358

(Beérkezett: 2005. december 13.)

IVÁN SZABOLCS

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

INFORMATIKAI TANSZÉKCSOPORT, SZÁMÍTÁSTUDOMÁNY ALAPJAI TANSZÉK

6701 SZEGED, PF. 652.

szabivan@inf.u-szeged.hu

ON THE ITERATED SHUFFLE OF SOME REGULAR LANGUAGES

SZABOLCS IVÁN

In the paper the iterated shuffle operation is investigated on some regular languages. We give necessary and sufficient conditions for regularity and context-freeness of languages that are the

iterated shuffle of some singleton language, or a commutative closure of some singleton language. We prove that for any finite language $L \subseteq a^+b^+$ it holds that the iterated shuffle of L is context-free, and characterize the cases when such a language is even regular. Also the iterated shuffle of any 1-testable language is proven to be locally threshold testable. Finally, a family of subclasses of the commutative regular languages is identified such that each member of this family is closed under both the shuffle product and the iterated shuffle operations.

TÖBBRÉTEGŰ KERCEPTRON

SZABÓ ZOLTÁN, LŐRINCZ ANDRÁS

Többrétegű Perceptronokba (MLP) Támasztó Vektor Gépeket (SVM) ágyazva többrétegű SVM hálókat konstruálunk. Az összekapcsolt approximációs forma az SVM-ek általánosító képességét és az MLP-k rejtett rétegéből adódó kombinatorikus tulajdonságot egyaránt kihasználhatja. A hálózatot Többrétegű Kerceptron (MLK) hálózatnak nevezzük. Az MLK rendelkezik hibavisszaterjesztésen alapuló hangolási eljárással, amit jelen munkában bemutatunk. Négyzetes költségfüggvényre – regularizációs lehetőségekkel – hangolási szabályt származtatunk. Megközelítésünk egy további tulajdonsága, hogy az ún. *kernel trükk* segítségével az MLK-hoz tartozó számítások a duális térben kivitelezhetők.

1. Bevezetés

A Többrétegű Perceptronokat (MLP) és a Támasztó Vektor Gépeket (SVM) széles körben tanulmányozták az irodalomban. Kiváló áttekintést ad a témában [1, 8]. Munkánkban az SVM-eket többrétegű formára terjesztjük ki, és a kapott rendszerre hibavisszaterjesztésen alapuló hangolási szabályt vezetünk le. Az ún. kernel trükk alkalmazásával, a problémát skaláris szorzat segítségével tárgyaljuk. Más, ugyanezt a trükköt használó eljárások leírása megtalálható a [5, 10, 11] hivatkozásokban.

2. A hálózat felépítése

2.1. Jelölések

Különböző betűtípussal jelöljük a számokat (a), a vektorokat (\mathbf{a}), és a mátrixokat (\mathbf{A}). \mathbf{A}^T az \mathbf{A} mátrix transzponáltja. Az \mathbf{a} vektor egy a komponenssel való kibővítését $[a; a]$ -ként írjuk. \mathbb{R} szimbolizálja a valós számokat. $\|\cdot\|_2$ jelöli az E Euklideszi térbeli $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skaláris szorzat által indukált L_2 normát, azaz $\|\mathbf{e}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle}$ ($\mathbf{e} \in E$).

2.2. Építőelemek

2.2.1. SVM

Az SVM-ek gyakran használt approximációs eszközök [3, 4, 9, 10, 6]. $\{\mathbf{x}(t), d(t)\}_{t=1..T}$ mintapárokat közelítenek, ahol az $\mathbf{x}(t)$ input az \mathcal{X} *input térből* származik, és $d(t) \in \mathbb{R}$. A közelítés lineáris egy alkalmas \mathcal{H} térben. Ebbe a térbe a

$$\varphi : \mathbf{x} \in \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{H}$$

hozzárendelés képezi le az $\mathbf{x}(t)$ inputokat. $\varphi(\mathbf{x})$ -et az \mathbf{x} input *reprezentációjaként* interpretálhatjuk. Az SVM közelítés a

$$f_{\mathbf{w}} : \mathbf{x} \in \mathcal{X} \mapsto \langle \mathbf{w}, \varphi(\mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{H}} \quad (\mathbf{w} \in \mathcal{H})$$

formájú. Formálisan, az SVM feladat

$$\min_{\mathbf{w}} H[\mathbf{w}] := C \cdot \sum_{t=1}^T V[d(t), f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}(t))] + \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (C > 0),$$

ahol $V[\cdot, \cdot]$ az ún. *veszteségfüggvény*, amely lehet kvadratikussal, ϵ -érzékeny, de más formákat is szoktak használni [5]. Röviden, az SVM-ek regularizált lineáris approximátorok [8].

Az explicit φ leképezés helyett a \mathcal{H} tér egy k kernel segítségével is leírható, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(k)$ [7], ahol $\varphi(\mathbf{x}) = k(\cdot, \mathbf{x})$. A k kernel a

$$\langle f(\cdot), k(\cdot, \mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{H}} = f(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \mathcal{X}, \forall f \in \mathcal{H}),$$

reprodukáló tulajdonsággal rendelkezik [2, 7], és \mathcal{H} -t Reprodukáló Kernel Hilbert Térnek (RKHS) nevezzük. Tehát, tetszőleges $f \in \mathcal{H}$ RKHS-beli függvény $k(\cdot, \mathbf{x})$ kernellel való skaláris szorzata az \mathbf{x} pontbeli kiértékelésnek felel meg. A skaláris szorzat a \mathcal{H} térben implicit módon számolható a kernel segítségével

$$k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}) \rangle_{\mathcal{H}} \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{X}).$$

$$\text{Így a } \mathbf{w} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot \varphi(\mathbf{z}_j) \quad (\alpha_j \in \mathbb{R}, \mathbf{z}_j \in \mathcal{X}) \text{ választással}$$

$$f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{w}, \varphi(\mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot \langle \varphi(\mathbf{z}_j), \varphi(\mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot k(\mathbf{z}_j, \mathbf{x}).$$

Tehát az $f_{\mathbf{w}}$ függvény az α_j együtthatók, a \mathbf{z}_j minták és a k kernel segítségével a $\varphi(\mathbf{x})$ reprezentáció explicit felhasználása nélkül kiértékelhető. Ez a fogás a *kernel trükk*.

2.2.2. MLP

Az MLP neurális hálózat többrétegű, minden réteg egy

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{g}(\mathbf{W} \cdot \mathbf{x}) \quad (1)$$

formájú nemlineáris leképezést valósít meg. Itt \mathbf{g} egy differenciálható nemlineáris függvény. Az MLP feladatban úgy hangoljuk az egyes rétegek \mathbf{W} mátrixait, hogy a hálózat az $\{\mathbf{x}(t), \mathbf{d}(t)\}$ input-output minta pároknak megfelelő leképezést közelítse. Formálisan, célunk a

$$\varepsilon^2(t) := \|\mathbf{d}(t) - \mathbf{y}(t)\|_2^2 \rightarrow \min_{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots}, \quad (2)$$

kvadratikusan minimalizálása, ahol $\mathbf{y}(t)$ jelöli a hálózat t időpontbeli kimenetét. Az MLP feladatot oldja meg a jól ismert *visszaterjesztési algoritmus*.

2.3. Az MLK hálózat

Egy általános MLP réteg által megvalósított leképezés [lásd az (1) egyenletet]

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{g} \left(\begin{bmatrix} \vdots \\ \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{x} \rangle \\ \vdots \end{bmatrix} \right)$$

formájú, ahol \mathbf{w}_i^T a \mathbf{W} mátrix i . sorát jelöli. SVM illeszthető az MLP-be, ha a hálózat egy általános rétege a

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{g} \left(\begin{bmatrix} \langle \mathbf{w}_1, \varphi(\mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{H}} \\ \vdots \\ \langle \mathbf{w}_N, \varphi(\mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{H}} \end{bmatrix} \right)$$

hozzárendelést valósítja meg.¹

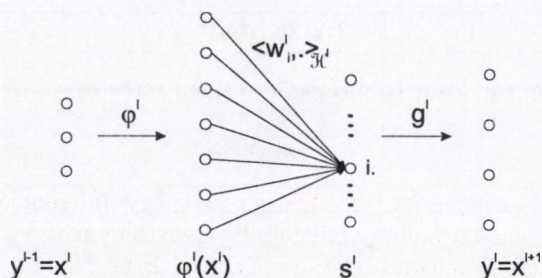
Egy ilyen rétegekből felépített hálózatot Többrétegű Kerceptronnak (MLK) fogunk hívni, lásd az 1. ábrát.

Minden egyes réteg (\mathbf{x}^l) inputját az előző réteg (\mathbf{y}^{l-1}) outputja szolgáltatja. A 0-adik réteg a külvilág, ami az MLK első rétege számára szolgáltatja a bemenetet.

$$\mathbf{x}^l = \mathbf{y}^{l-1} \in \mathbb{R}^{N_l^l},$$

ahol N_l^l az l -edik réteg dimenziója. Az l -edik réteg \mathbf{x}^l inputja a φ^l leképezésen átesve a \mathbf{w}_i^l súlyokkal szorozódik. Ez a két lépcsős eljárás implicit módon elvégezhető a k^l kerneleket és a \mathbf{w}_i^l -k kifejtéseit használva. Az adódó $\mathbf{s}^l \in \mathbb{R}^{N_s^l}$ vektorra hat

¹Az egyszerűség kedvéért válasszuk az \mathcal{X} input teret a véges dimenziós Euklideszi-térnek, azaz \mathbb{R}^n -nek.



1. ábra. Az MLK hálózat l -edik rétege, $l = 1, 2, \dots, L$. Minden egyes réteg inputját (\mathbf{x}^l) az előző réteg outputja adja (\mathbf{y}^{l-1}). A 0-adik réteg a külvilág, ami az MLK első réteg számára szolgáltatja a bemenetet. Az l -edik réteg \mathbf{x}^l inputja a φ^l leképezésen esik át, majd a réteg \mathbf{w}_i^l súlyaival szorozódik skalárisan a $\mathcal{H}^l = \mathcal{H}^l(k^l)$ RKHS-ben. Az adódó \mathbf{s}^l vektorra hat a \mathbf{g}^l differenciálható nemlinearitás. Ezen nemlineáris függvény kimenete a következő réteg bemenete, \mathbf{x}^{l+1} . A hálózat kimenete az utolsó réteg kimenete.

a \mathbf{g}^l nemlineáris, differenciálható függvény. Ennek a nemlineáris függvénynek a kimenete a következő réteg bemenete, azaz \mathbf{x}^{l+1} . Az utolsó (L .) réteg outputját – azaz a hálózat outputját – \mathbf{y} jelöli.

$$\mathbf{y}^l = \mathbf{x}^{l+1} \in \mathbb{R}^{N_o^l},$$

és az l -edik réteg kimenetének dimenziója N_o^l .

A következőkben megmutatjuk, hogy (i) az MLK-k is rendelkeznek visszaterjesztési szabállyal, ami (ii) csak kernelek segítségével is megadható, és így a számítások a duális térben kivitelezhetőek.

3. Az MLK visszaterjesztési eljárás

Egy kicsit általánosabb, regularizációs tagokat is tartalmazó feladat a

$$c(t) := \varepsilon^2(t) + r(t) \longrightarrow \min_{\{\mathcal{H}^l \ni \mathbf{w}_i^l: l=1, \dots, L; i=1, \dots, N_S^l\}},$$

probléma, ahol

$$\varepsilon^2(t) = \|\mathbf{d}(t) - \mathbf{y}(t)\|_2^2, \quad r(t) = \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{N_S^l} \lambda_i^l \cdot \|\mathbf{w}_i^l(t)\|_{\mathcal{H}^l}^2 \quad (\lambda_i^l \geq 0)$$

a költségfüggvény approximációs és regularizációs tagjai, és $\mathbf{y}(t)$ jelöli a hálózat t -edik inputra adott kimenetét. A λ_i^l paraméterek szabályozzák az approximáció és regularizáció közötti arányt. $\lambda_i^l = 0$ -ra a legjobb közelítést keressük, mint az MLP feladatban [(2) egyenlet]. λ_i^l értékeket növelve az approximáció simasága nő.

A fenti jelölésekkel a következő állítások igazolhatók.

3.1. TÉTEL. (explicit eset) *Tegyük fel, hogy az $\mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{w}, \varphi^l(\mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{H}^l}$ és a \mathbf{g}^l függvények differenciálhatók ($l = 1, \dots, L$). Ekkor visszaterjesztési szabály származtatható az MLK-ra, ha a költségfüggvény*

$$c(t) = \varepsilon^2(t) + \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{N_S^l} \lambda_i^l \cdot \|\mathbf{w}_i^l(t)\|_{\mathcal{H}^l}^2 \quad (\lambda_i^l \geq 0) \text{ alakú.}$$

3.2. TÉTEL. (implicit eset) *Tegyük fel, hogy az alábbiak teljesülnek:*

1. *Differenciálhatósági megkötés: A k^l kernelek mindkét változójukban, illetve a \mathbf{g}^l függvények differenciálhatók ($l = 1, \dots, L$).*
2. *Kifejtési tulajdonság: A hálózat kezdeti $\mathbf{w}_i^l(1)$ súlyai egy adott*

$$\mathcal{H}^l \ni \mathbf{w}_i^l(1) = \sum_{j=1}^{N_i^l(1)} \alpha_{i,j}^l(1) \cdot \varphi^l(\mathbf{z}_{i,j}^l(1)) \quad (l = 1, \dots, L; i = 1, \dots, N_S^l) \quad (3)$$

típusú kifejtéssel, duális reprezentációval rendelkeznek.

Ekkor létezik visszaterjesztési eljárás az MLK hálózatra, feltéve, hogy a költségfüggvény

$$c(t) = \varepsilon^2(t) + \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{N_S^l} \lambda_i^l \cdot \|\mathbf{w}_i^l(t)\|_{\mathcal{H}^l}^2 \quad (\lambda_i^l \geq 0)$$

formájú. Az eljárás megőrzi a (3) tulajdonságot, ami így a behangolt hálózatra is fennáll. Az algoritmus implicit abban az értelemben, hogy a duális térben realizálható.

Az MLK visszaterjesztési eljárások pszeudokódjai a 3.1. és a 3.2. táblázatban találhatók. Az algoritmusok levezetését, mind az explicit mind az implicit esetre a következő alfejezetben adjuk meg.

Az MLK visszaterjesztési eljárások szemléletesen (párhuzamosan lásd a 3.1. és a 3.2. táblázatokat):

1. A $\delta^l(t)$ visszaterjesztett hiba $\delta^L(t)$ -ből indulva egy hátráló rekurzióval fejlődik a $\frac{d[\mathbf{s}^{l+1}(t)]}{d[\mathbf{s}^l(t)]}$ deriválton keresztül.
2. A $\frac{d[\mathbf{s}^{l+1}(t)]}{d[\mathbf{s}^l(t)]}$ kifejezés a φ^{l+1} leképezés, vagy implicit módon a k^{l+1} kernel segítségével határozható meg.
3. \mathbf{w} -k hangolásában két tényező játszik szerepet:
 - (a) *Felejtés* valósul meg a \mathbf{w}_i^l súlyok $(1 - 2\mu_i^l(t) \cdot \lambda_i^l)$ -szeres szorzása által, ahol λ_i^l a regularizációs együttható.

- (b) *Adaptáció* jelenik meg a visszaterjesztett hibán keresztül. Az l -edik réteg súlyait az $\mathbf{x}^l(t)$ reprezentáció, azaz az aktuális inputnak az l -edik rétegre leképezett értéke állítja úgy, hogy a hangolást a visszaterjesztett hiba súlyozza.

3.1. táblázat. (Az explicit MLK visszaterjesztési algoritmus pseudokódja.)

Algoritmus bemenete

mintapontok: $\{\mathbf{x}(t), \mathbf{d}(t)\}_{t=1, \dots, T, T}$

költségfüggvény: $\lambda_i^l \geq 0$ ($l = 1, \dots, L; i = 1, \dots, N_S^l$)

tanulási ráták: $\mu_i^l(t) > 0$ ($l = 1, \dots, L; i = 1, \dots, N_S^l; t = 1, \dots, T$)

Hálózat inicializációja

méret: L (rétegek száma), N_1^l, N_S^l, N_0^l ($l = 1, \dots, L$)

súlyok: $\mathbf{w}_i^l(1)$ ($l = 1, \dots, L; i = 1, \dots, N_S^l$)

Számítás kezdete

Aktuális input $\mathbf{x}(t)$

Előreterjesztés

$\mathbf{x}^l(t)$ ($l = 2, \dots, L + 1$), $\mathbf{s}^l(t)$ ($l = 2, \dots, L$)²

Hiba visszaterjesztése

$l = L$

while $l \geq 1$

if ($l = L$)

$|\delta^L(t) = 2 \cdot [\mathbf{y}(t) - \mathbf{d}(t)]^T \cdot (\mathbf{g}^L)'(\mathbf{s}^L(t))$

else

$$\frac{d[\mathbf{s}^{l+1}(t)]}{d[\mathbf{s}^l(t)]} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \frac{d[\langle \mathbf{w}_i^{l+1}(t), \varphi^{l+1}(u) \rangle_{2^{l+1}}]}{d[u]} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{x}^{l+1}(t)} \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot [(\mathbf{g}^l)'(\mathbf{s}^l(t))]^3$$

$$\delta^l(t) = \delta^{l+1}(t) \cdot \frac{d[\mathbf{s}^{l+1}(t)]}{d[\mathbf{s}^l(t)]}$$

Súlyok frissítése

for $\forall i: 1 \leq i \leq N_S^l$

$$\mathbf{w}_i^l(t+1) = (1 - 2\mu_i^l(t) \cdot \lambda_i^l) \cdot \mathbf{w}_i^l(t) - \mu_i^l(t) \cdot \delta_i^l(t) \cdot \varphi^l(\mathbf{x}^l(t))$$

$l = l - 1$

Számítás vége

²Így a hálózat kimenete, azaz $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}^{L+1}(t)$ is kiszámítható.

³Itt: $i = 1, \dots, N_S^{l+1}$.

3.2. táblázat. (Az implicit MLK visszaterjesztési algoritmus pszeudokódja.)**Algoritmus bemenete**mintapontok: $\{\mathbf{x}(t), \mathbf{d}(t)\}_{t=1, \dots, T, T}$ költségfüggvény: $\lambda_i^l \geq 0$ ($l = 1, \dots, L; i = 1, \dots, N_S^l$)tanulási ráták: $\mu_i^l(t) > 0$ ($l = 1, \dots, L; i = 1, \dots, N_S^l; t = 1, \dots, T$)**Hálózat inicializációja**méretek: L (rétegek száma), N_1^l, N_S^l, N_o^l ($l = 1, \dots, L$)együtthatók: $\alpha_i^l(1) \in \mathbb{R}^{N_i^l(1)}$ össök: $\mathbf{z}_{i,j}^l(1)$, ahol $j = 1, \dots, N_i^l(1)$ **Számítás kezdete****Aktuális input** $\mathbf{x}(t)$ **Előreterjesztés** $\mathbf{x}^l(t)$ ($l = 2, \dots, L+1$), $\mathbf{s}^l(t)$ ($l = 2, \dots, L$)⁴ $l = L$ while $l \geq 1$ if ($l = L$)

$$\delta^L(t) = 2 \cdot [\mathbf{y}(t) - \mathbf{d}(t)]^T \cdot (\mathbf{g}^L)'(\mathbf{s}^L(t))$$

else

$$\frac{d[\mathbf{s}^{l+1}(t)]}{d[\mathbf{s}^l(t)]} =$$

$$= \begin{bmatrix} \vdots \\ \sum_{j=1}^{N_i^{l+1}(t)} \alpha_{ij}^{l+1}(t) \cdot [k^{l+1}]'_y(\mathbf{z}_{ij}^{l+1}(t), \mathbf{x}^{l+1}(t)) \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot [(\mathbf{g}^l)'(\mathbf{s}^l(t))]^5$$

$$\delta^l(t) = \delta^{l+1}(t) \cdot \frac{d[\mathbf{s}^{l+1}(t)]}{d[\mathbf{s}^l(t)]}$$

Súlyok frissítésefor $\forall i: 1 \leq i \leq N_S^l$

$$N_i^l(t+1) = N_i^l(t) + 1$$

$$\alpha_i^l(t+1) = [(1 - 2\mu_i^l(t) \cdot \lambda_i^l) \cdot \alpha_i^l(t); -\mu_i^l(t) \cdot \delta_i^l(t)]$$

$$\mathbf{z}_{i,j}^l(t+1) = \mathbf{z}_{i,j}^l(t) \quad (j = 1, \dots, N_i^l(t))$$

$$\mathbf{z}_{i,j}^l(t+1) = \mathbf{x}^l(t) \quad (j = N_i^l(t+1))$$

 $l = l - 1$ **Számítás vége**

⁴Igy a hálózat kimenete, azaz $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}^{L+1}(t)$ is kiszámítható.

⁵ $i = 1, \dots, N_S^{l+1}$

3.1. Az MLK visszaterjesztési eljárások levezetése

Először a $\frac{d[c(t)]}{d[\mathbf{w}_i^l(t)]}$ gradienst származtatjuk. Utána a gradienst a legmeredekebb lejtő módszerbe ágyazzuk.⁶ A $c(t)$ hiba két tagból áll, approximációs és regularizációs tagból:

$$c(t) = \varepsilon^2(t) + r(t).$$

3.1.1. Az approximációs tag gradiense

Először néhány MLK felépítéséből adódó alapösszefüggést sorolunk fel. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban a t indexet elhagyjuk [precízen: $\mathbf{x}^l = \mathbf{x}^l(t)$, $\mathbf{y}^l = \mathbf{y}^l(t)$, $\mathbf{s}^l = \mathbf{s}^l(t)$, $\mathbf{w}_i^l = \mathbf{w}_i^l(t)$].

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^l &= \mathbf{y}^{l-1} \in \mathbb{R}^{N_l} \quad (l = 1, \dots, L+1) \\ \mathbf{x}^{l+1} &= \mathbf{g}^l(\mathbf{s}^l) \quad (l = 1, \dots, L) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^l &= \begin{bmatrix} \langle \mathbf{w}_1^l, \varphi^l(\mathbf{x}^l) \rangle_{\mathcal{H}^l} \\ \vdots \\ \langle \mathbf{w}_i^l, \varphi^l(\mathbf{x}^l) \rangle_{\mathcal{H}^l} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (l = 1, \dots, L; i = 1, \dots, N_S^l) \\ &= \begin{bmatrix} \langle \mathbf{w}_1^l, \varphi^l(\mathbf{g}^{l-1}(\mathbf{s}^{l-1})) \rangle_{\mathcal{H}^l} \\ \vdots \\ \langle \mathbf{w}_i^l, \varphi^l(\mathbf{g}^{l-1}(\mathbf{s}^{l-1})) \rangle_{\mathcal{H}^l} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (l = 2, \dots, L; i = 1, \dots, N_S^l) \\ \mathbf{s}^{l+1} &= \begin{bmatrix} \langle \mathbf{w}_1^{l+1}, \varphi^{l+1}(\mathbf{g}^l(\mathbf{s}^l)) \rangle_{\mathcal{H}^{l+1}} \\ \vdots \\ \langle \mathbf{w}_i^{l+1}, \varphi^{l+1}(\mathbf{g}^l(\mathbf{s}^l)) \rangle_{\mathcal{H}^{l+1}} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (l = 1, \dots, L-1; i = 1, \dots, N_S^{l+1}) \end{aligned} \quad (5)$$

Az l -edik réteg visszaterjesztett hibáját definiáljuk a

$$\delta^l(t) := \frac{d[\varepsilon^2(t)]}{d[\mathbf{s}^l(t)]} \quad (l = 1, \dots, L)$$

⁶ A legmeredekebb lejtő módszerét használjuk ötletünk bemutatásához. Más, ettől eltérő gradiens alapú technikák szintén szóba jöhetnének. Például a momentum módszer, illetve a konjugált gradiens eljárások is rendelkeznek előnyös tulajdonságokkal.

módon. Speciálisan, az utolsó rétegre:

$$\begin{aligned}\delta^L(t) &= \frac{d[\varepsilon^2(t)]}{d[s^L(t)]} = \frac{d[\|\mathbf{d}(t) - \mathbf{g}^L(s^L(t))\|_2^2]}{d[s^L(t)]} \\ &= 2 \cdot [\mathbf{g}^L(s^L(t)) - \mathbf{d}(t)]^T \cdot (\mathbf{g}^L)'(s^L(t)) \\ &= 2 \cdot [\mathbf{y}(t) - \mathbf{d}(t)]^T \cdot (\mathbf{g}^L)'(s^L(t)).\end{aligned}$$

Itt először a láncszabályt, majd a vektorokra érvényes

$$\frac{d[\|\mathbf{d} - \mathbf{y}\|_2^2]}{d\mathbf{y}} = 2(\mathbf{y} - \mathbf{d})^T$$

összefüggést használtuk ki, végül beillesztettük az MLK szerkezetéből adódó

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}^L(s^L(t))$$

azonosságot.

A

$$\frac{d[s^{l+1}(t)]}{d[s^l(t)]} \quad (l = 1, \dots, L-1) \quad (6)$$

kifejezés az (5) egyenlet segítségével számolható. Elégséges a

$$\frac{d[\langle \mathbf{w}, \varphi(\mathbf{g}(\mathbf{s})) \rangle_{\mathcal{H}}]}{d[\mathbf{s}]} \quad (7)$$

alakú kifejezéseket tekintenünk, abból a teljes derivált „kirakható”. (7) értéke az alábbi lemma alkalmazásával megadható.

3.1. LEMMA. Legyen $\mathbf{w} \in \mathcal{H} = \mathcal{H}(k)$ egy RKHS-beli pont. Tegyük fel, hogy:

1. A k kernel mindkét argumentuma szerint differenciálható, és jelölje k'_y a kernel második argumentuma szerint vett deriváltját.
2. Implicit esetben feltételezzük még, hogy \mathbf{w} véges sok \mathbf{z}_i pont \mathcal{H} -beli reprezentációjának képterében fekszik. Azaz

$$\mathbf{w} \in \text{Im}(\varphi(\mathbf{z}_1), \varphi(\mathbf{z}_2), \dots, \varphi(\mathbf{z}_N)) \subseteq \mathcal{H}.$$

Legyen ez a kifejtés $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot \varphi(\mathbf{z}_j)$, ahol $\alpha_j \in \mathbb{R}$.

Ekkor:

1. Explicit eset:

$$\frac{d[\langle \mathbf{w}, \varphi(\mathbf{g}(\mathbf{s})) \rangle_{\mathcal{H}}]}{d[\mathbf{s}]} = \frac{d[\langle \mathbf{w}, \varphi(\mathbf{u}) \rangle_{\mathcal{H}}]}{d[\mathbf{u}]} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{g}(\mathbf{s})} \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{s})$$

2. *Implicit eset:*

$$\frac{d[\langle \mathbf{w}, \varphi(\mathbf{g}(\mathbf{s})) \rangle_{\mathcal{H}}]}{d[\mathbf{s}]} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot k'_y(\mathbf{z}_j, \mathbf{g}(\mathbf{s})) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{s})$$

Bizonyítás.

1. Explicit eset: az állítás adódik a láncszabályból.
2. Implicit eset:

$$\begin{aligned} \frac{d[\langle \mathbf{w}, \varphi(\mathbf{g}(\mathbf{s})) \rangle_{\mathcal{H}}]}{d[\mathbf{s}]} &= \frac{d[\langle \sum_j \alpha_j \cdot \varphi(\mathbf{z}_j), \varphi(\mathbf{g}(\mathbf{s})) \rangle_{\mathcal{H}}]}{d[\mathbf{s}]} \\ &= \frac{d[\sum_j \alpha_j \cdot \langle \varphi(\mathbf{z}_j), \varphi(\mathbf{g}(\mathbf{s})) \rangle_{\mathcal{H}}]}{d[\mathbf{s}]} \\ &= \frac{d[\sum_j \alpha_j \cdot k(\mathbf{z}_j, \mathbf{g}(\mathbf{s}))]}{d[\mathbf{s}]} \\ &= \sum_j \alpha_j \cdot k'_y(\mathbf{z}_j, \mathbf{g}(\mathbf{s})) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{s}). \end{aligned}$$

Az első egyenletben beírtuk \mathbf{w} kifejtését, majd kihasználtuk a skaláris szorzat linearitását. Ezután a

$$k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}) \rangle_{\mathcal{H}}$$

reprezentáció és kernel közti összefüggést alkalmaztuk. Az utolsó lépés a láncszabályból adódik.

□

Folytatjuk (6) kiszámítását:

1. Explicit eset: Az előző lemma szerint

$$\begin{aligned} \frac{d[\mathbf{s}^{l+1}(t)]}{d[\mathbf{s}^l(t)]} &= \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \frac{d[\langle \mathbf{w}_i^{l+1}(t), \varphi^{l+1}(\mathbf{u}) \rangle_{\mathcal{H}^{l+1}}]}{d[\mathbf{u}]} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{g}^l(\mathbf{s}^l(t))} \\ \vdots \end{array} \cdot (\mathbf{g}^l)'(\mathbf{s}^l(t)) \right] \\ &= \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \frac{d[\langle \mathbf{w}_i^{l+1}(t), \varphi^{l+1}(\mathbf{u}) \rangle_{\mathcal{H}^{l+1}}]}{d[\mathbf{u}]} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{x}^{l+1}(t)} \\ \vdots \end{array} \right] \cdot [(\mathbf{g}^l)'(\mathbf{s}^l(t))] \\ &\quad (l = 1, \dots, L-1; i = 1, \dots, N_S^{l+1}). \end{aligned}$$

A második egyenlőségnél (i) kihasználtuk a (4) azonosságot, és (ii) kiemeltük a $(\mathbf{g}^l)'(\mathbf{s}^l(t))$ tagot mátrixok szorzásának megfelelően.

2. Implicit eset: $\mathbf{w}_i^{l+1}(t)$ -kre fennáll a (3) kifejtési tulajdonság. Ez kezdetben feltevésünk volt. A 3.1.3. alfejezetben látni fogjuk, hogy ez a tulajdonság az iterációk során „öröklődik”. Így

$$\mathbf{w}_i^{l+1}(t) = \sum_{j=1}^{N_i^{l+1}(t)} \alpha_{ij}^{l+1}(t) \cdot \varphi^{l+1}(\mathbf{z}_{ij}^{l+1}(t)) \quad (l = 1, \dots, L-1; i = 1, \dots, N_S^{l+1})$$

és a kívánt (6) derivált a lemma alkalmazásával

$$\begin{aligned} \frac{d[\mathbf{s}^{l+1}(t)]}{d[\mathbf{s}^l(t)]} &= \begin{bmatrix} \vdots \\ \sum_{j=1}^{N_i^{l+1}(t)} \alpha_{ij}^{l+1}(t) \cdot [k^{l+1}]'_y(\mathbf{z}_{ij}^{l+1}(t), \mathbf{g}^l(\mathbf{s}^l(t))) \cdot (\mathbf{g}^l)'(\mathbf{s}^l(t)) \\ \vdots \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \vdots \\ \sum_{j=1}^{N_i^{l+1}(t)} \alpha_{ij}^{l+1}(t) \cdot [k^{l+1}]'_y(\mathbf{z}_{ij}^{l+1}(t), \mathbf{x}^{l+1}(t)) \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot [(\mathbf{g}^l)'(\mathbf{s}^l(t))] \\ &\quad (l = 1, \dots, L-1; i = 1, \dots, N_S^{l+1}). \end{aligned}$$

A második egyenlőségnél kihasználtuk a (4) azonosságot. A $(\mathbf{g}^l)'(\mathbf{s}^l(t))$ mátrix tagot mátrixok szorzásának megfelelően kiemeltük.

Láncszabály és $\delta^{l+1}(t)$ definíciója alapján

$$\delta^l(t) = \frac{d[\varepsilon^2(t)]}{d[\mathbf{s}^l(t)]} = \frac{d[\varepsilon^2(t)]}{d[\mathbf{s}^{l+1}(t)]} \cdot \frac{d[\mathbf{s}^{l+1}(t)]}{d[\mathbf{s}^l(t)]} = \delta^{l+1}(t) \cdot \frac{d[\mathbf{s}^{l+1}(t)]}{d[\mathbf{s}^l(t)]} \quad (l = 1, \dots, L-1).$$

Ismét alkalmazva a láncszabályt, $\delta^l(t)$ és $\mathbf{s}^l(t)$ definíciója szerint

$$\frac{d[\varepsilon^2(t)]}{d[\mathbf{w}_i^l(t)]} = \frac{d[\varepsilon^2(t)]}{d[\mathbf{s}_i^l(t)]} \cdot \frac{d[\mathbf{s}_i^l(t)]}{d[\mathbf{w}_i^l(t)]} = \delta_i^l(t) \cdot \varphi^l(\mathbf{x}^l(t)) \quad (l = 1, \dots, L; i = 1, \dots, N_S^l), \quad (8)$$

ami a kívánt derivált. Figyeljük meg, hogy a derivált a $\delta_i^l(t)$ szám és az aktuális $\mathbf{x}(t)$ input l . rétegre eső $\mathbf{x}^l(t)$ lenyomatának $\varphi^l(\mathbf{x}^l(t))$ reprezentációjával kifejezhető.

3.1.2. Regularizációs tag

Ez a tag egyszerűen megadható:

$$\frac{d[r(t)]}{d[\mathbf{w}_i^l(t)]} = \frac{d \left[\sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{N_S^l} \lambda_i^l \cdot \|\mathbf{w}_i^l(t)\|_{\mathcal{H}^l}^2 \right]}{d[\mathbf{w}_i^l(t)]} = 2\lambda_i^l \cdot \mathbf{w}_i^l(t) \quad (9)$$

$$(l = 1, \dots, L; i = 1, \dots, N_S^l).$$

Vegyük észre, hogy a derivált az aktuális $\mathbf{w}_i^l(t)$ súlyok skalárszorosa. Ezen forma szerint implicit hangolási szabály adható.

3.1.3. Költség tag

Használva a

$$\frac{d[c(t)]}{d[\mathbf{w}_i^l(t)]} = \frac{d[\varepsilon^2(t)]}{d[\mathbf{w}_i^l(t)]} + \frac{d[r(t)]}{d[\mathbf{w}_i^l(t)]} \quad (l = 1, \dots, L; i = 1, \dots, N_S^l)$$

összefüggést és az approximációs, illetve regularizációs tagokra kapott eredményeinket [(8) és (9) egyenlet] a

$$\mathbf{w}_i^l(t+1) = \mathbf{w}_i^l(t) - \mu_i^l(t) \cdot \frac{d[c(t)]}{d[\mathbf{w}_i^l(t)]} \quad (l = 1, \dots, L; i = 1, \dots, N_S^l)$$

legmeredekebb lejtő szabályban adódik, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i^l(t+1) &= \mathbf{w}_i^l(t) - \mu_i^l(t) \cdot (\delta_i^l(t) \cdot \boldsymbol{\varphi}^l(\mathbf{x}^l(t)) + 2\lambda_i^l \cdot \mathbf{w}_i^l(t)) \\ &= (1 - 2\mu_i^l(t) \cdot \lambda_i^l) \cdot \mathbf{w}_i^l(t) - \mu_i^l(t) \cdot \delta_i^l(t) \cdot \boldsymbol{\varphi}^l(\mathbf{x}^l(t)) \\ &\quad (l = 1, \dots, L; i = 1, \dots, N_S^l). \end{aligned}$$

Ugyanez duális formában

$$\boldsymbol{\alpha}_i^l(t+1) = [(1 - 2\mu_i^l(t) \cdot \lambda_i^l) \cdot \boldsymbol{\alpha}_i^l(t); -\mu_i^l(t) \cdot \delta_i^l(t)] \quad (l = 1, \dots, L; i = 1, \dots, N_S^l).$$

Így a hálózat súlyvektorainak kifejtési tulajdonsága [(3) egyenlet] az iterációk során öröklődik. Speciálisan, a számítás végeztével kapott \mathbf{w}_i^l paraméterekre is fennáll. Összefoglalva, MLK-ra létezik visszaterjesztési eljárás. A levezetett explicit és implicit eljárásokat a 3.1. és a 3.2. táblázat foglalja össze.

4. Konklúziók

Új többrétegű modell, a Többrétegű Kerceptron (MLK) elméleti leírásával foglalkoztunk. Ez a hálózat egyesítheti a Többrétegű Perceptron (MLP) és a Támasztó Vektor Gépek (SVM) előnyeit: (i) Súlyai hangolhatók és a hangolás regularizációs

elvek mentén is megtehető. (ii) MLK-ban kernelek használata lehetséges. (iii) Az MLK hálózat behangolt súlyai segítségével a hálózat kimenete gyorsan számolható. (iv) Az MLK *rejtett rétegekkel* rendelkezik, és így képes lehet az SVM-ek adta partícionálásokat kombinálni. A megközelítés különböző adatbázisokon adódó előnyei és hátrányai jövőbeni kutatásaink tárgyát képezi.

Hivatkozások

- [1] S. HAYKIN: *Neural Networks*. PRENTICE HALL, NEW JERSEY, USA (1999)
- [2] N. ARONSZAJN: *Theory of Reproducing Kernels*. TRANS. OF AM. MATH. SOC. **68**, (1950) 337–404.
- [3] V. N. VAPNIK: *The Nature of Statistical Learning Theory*. SPRINGER-VERLAG NEW YORK, INC., (1995)
- [4] V. N. VAPNIK: *Statistical Learning Theory*. WILEY, CHICHESTER, GB, (1998)
- [5] R. HERBRICH: *Learning Kernel Classifiers*. MIT PRESS, (2002)
- [6] K.-R. MÜLLER, A. SMOLA, G. RÄTSCH, B. SCHÖLKOPF, J. KOHLMORGEN AND V. VAPNIK: *Predicting Time Series with Support Vector Machines*. ADVANCES IN KERNEL METHODS, MIT PRESS, (1999), 243–254.
- [7] G. WAHBA: *Support Vector Machines, Reproducing Kernel Hilbert Spaces, and Randomized GACV*. ADVANCES IN KERNEL METHODS, MIT PRESS, (1999), 69–88.
- [8] T. EVGENIOU, M. PONTIL AND T. POGGIO: *Regularization Networks and Support Vector Machines*. ADVANCES IN COMPUTATIONAL MATHEMATICS **13** 1, (2000), 1–50.
- [9] V. VAPNIK, S. GOLOWICH AND A. SMOLA: *Support Vector Method for Function Estimation, Regression Estimation and Signal Processing*. NEURAL INFORMATION PROCESSING SYSTEMS VOL. 9., MIT PRESS, CAMBRIDGE, MA, (1997)
- [10] B. SCHÖLKOPF AND A. J. SMOLA: *Learning with Kernels*. MIT PRESS, CAMBRIDGE, MA, (2002)
- [11] J. SHAWE-TAYLOR AND N. CRISTIANINI: *Kernel Methods for Pattern Analysis*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, (2004)

(Beérkezett: 2006. március 31.)

SZABÓ ZOLTÁN, LŐRINCZ ANDRÁS
 EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
 INFORMÁCIÓS RENDSZEREK TANSZÉK, INFORMATIKAI KAR
 1117 BUDAPEST, PÁZMÁNY PÉTER SÉTÁNY 1/C.
 szzoli@cs.elte.hu, andras.lorincz@elte.hu

MULTILAYER KERCEPTRON

ZOLTÁN SZABÓ AND ANDRÁS LŐRINCZ

Multilayer Perceptrons (MLP) are formulated within Support Vector Machine (SVM) framework by constructing multilayer networks of SVMs. The coupled approximation scheme can take advantage of generalization capabilities of the SVM and the combinatory feature of the hidden layer of MLP. The network, the Multilayer Kerceptron (MLK) assumes its own backpropagation procedure that we shall derive here. Tuning rule will be provided for quadratic cost function, with regularization capability as well. A further appealing property of our approach is that by the aid of the so called kernel trick the MLK computations can be performed in the dual space.

RELÁCIÓS ADATBÁZISOK FUNKCIONÁLIS FÜGGŐSÉGI RENDSZEREINEK GRAFIKUS AXIOMATIZÁCIÓJA¹

DEMETROVICS JÁNOS, MOLNÁR ANDRÁS ÉS BERNHARD THALHEIM

Relációs adatbázisok tervezésekor az adattáblák sémái mellett fontos azt is megadni, hogy az adatbázisnak milyen invariáns tulajdonságokat kell teljesítenie. E feltételeket integritási megszorítások formájában adhatjuk meg, melyek közül a funkcionális függőségek a legalapvetőbbek. A tervezési gyakorlatban azonban a formalizmus használata nehézkes, így gyakran csak közvetve alkalmazzák. Egyes esetekben viszont az egyértelmű és teljes specifikáció csak függőségi rendszer megadásával lehetséges. Ehhez egy olyan diagramos reprezentációt készítettünk, amely lehetővé teszi a függőségi rendszerek hagyományos jelölésnél egyszerűbb, áttekinthetőbb kezelését. A grafikus reprezentáció a hozzá kifejlesztett axiomatizációval az implikált függőségek levezetését természetes módon támogatja, kisebb sémákra pedig kézzel is könnyen elvégezhetővé teszi. Ezen kívül kis sémákra (legfeljebb 5 attribútum esetén) a lehetséges függőségi rendszerek, ill. típusok számát is meghatároztuk.

1. Bevezetés

Egy adatbázis struktúrájának tervezésekor az alábbi három fő szempont játszik szerepet [27]. Ezek természetesen nem függetlenek egymástól.

Szintaktika: Az adatbázis logikai szerkezetének megadása induktív módon, alaptípusokból kiindulva, konstrukciós műveletek segítségével. A műveletek alkalmazhatósági feltételei logikai szabályokkal írhatók le.

Szemantika: Az adatbázis elfogadható állapotainak leírása. A megadott logikai feltételeket az adatbázis invariánsan kell tartsa, ellenkező esetben az adatok nem lennének értelmezhetők.

Pragmatika: Az adatbázis környezetének és a környezetben betöltött szerepének megadása. Alapja a tárolt adatok és az elvégezhető műveletek kapcsolata az adott intézménnyel vagy céggel, az intézményi, ill. üzleti munkafolyamatokkal, a felhasználókkal.

A szintaktikai rész egyszerű esetben megadható közvetlenül a használt adatmodellben (pl. relációs modell [16], ld. később e fejezetben), de általában valamely

¹Készült az OTKA támogatásával (T042706).

modellező nyelven tervezik meg az adatbázis szerkezetét (a nyelv többnyire vizuális, pl. egyed-kapcsolat modell [14]), s az elkészült tervet alakítják át az adatmodell sémájára. A pragmatikai rész megadása gyakran nem teljesen explicit. A szemantikai részben az adatbázis-invariánsok integritási megszorítások (függőségek) formájában adhatók meg (pl. egy azonosító szám valóban egyetlen egyedhez tartozzon, ne fordulhasson elő többször). Ezek sokfélék lehetnek; az egyes típusokhoz formális logikai nyelvek állnak rendelkezésre; többségük axiomatizálható [1]. A szemantikai rész megadása sokszor elbonyolódik, mert nehéz áttekinteni a függőségek közti kapcsolatokat és végiggondolni a lehetséges függőségek érvényességét. Ehhez szükség van módszerekre, melyek segítik az adatbázis tervezőjét meghatározni az eleve érvényes és érvénytelen függőségeket és azok logikai következményeit. Bár a modellező nyelvek többsége ad eszközöket ilyen megszorítások megadására, ez egyes esetekben a teljesen pontos specifikációra nem elegendő; logikai következtést például általában nem tesznek lehetővé.

1.1. A relációs adatmodell

A relációs modell [16] máig is a legszélesebb körben alkalmazott adatmodell, elsősorban egyszerűsége, kifejezőereje és hatékony implementálhatósága révén [1, 32]. Az adatbázis előre meghatározott típusú adattáblákból áll; egy tábla sorok halmaza; egy sor pedig a tábla típusában (sémájában) meghatározott attribútumokhoz rendel értékeket. Ez pontosabban az alábbiakat jelenti.²

Legyen $Attr$ és Dom szimbólumok egy-egy megszámlálható halmaza, melyekre értelmezett a $DOM : Attr \rightarrow 2^{Dom}$ függvény. $Attr$ az attribútumszimbólumok, Dom pedig az adatbázisban előforduló szimbólumok (elemi adatok) univerzuma. DOM adja meg az attribútumok típusát (értéktartományát).

Legyen $\mathcal{R} \subseteq Attr$ attribútumszimbólumok egy véges, nem üres halmaza (ún. *relációséma*), R pedig $r : \mathcal{R} \rightarrow Dom$ alakú függvények véges halmaza. R -et \mathcal{R} sémájú relációnak (*reláció-előfordulásnak*) nevezzük, ha

$$\forall r \in R : \forall A \in \mathcal{R} : r(A) \in DOM(A).$$

R *attribútumai* (vagy *oszlopai*) alatt \mathcal{R} elemeit értjük, R *sorai* alatt pedig magának az R relációnak az elemeit.

Legyen Rel egy megszámlálható szimbólumhalmaz, a *relációséma-szimbólumok* halmaza és T egy véges részhalmaza. Egy $DB : T \rightarrow 2^{Attr}$ függvényt *relációs adatbázissémának* nevezzük; DB sémájú *relációs adatbázisnak* pedig egy olyan DB függvényt, amely T minden t elemét egy $DB(t)$ sémájú relációra képezi le. Ezek a relációk az adatbázis táblái, T elemei a táblák nevei.

Például egy napi repülőgép-járatokat nyilvántartó J adattábla relációsémája lehet

$$\mathcal{J} = \{Járatszám, Honnan, Hová, Mikor\},$$

²Többféle, lényegében ekvivalens definíció is adható [1]. Mi az attribútumokat típusosnak tekintjük, relációsémabeli sorrendjüket tetszőlegesnek vesszük, az attribútumokat névvel azonosítjuk. Így a definíciót funkcionális alapon adjuk meg.

melynek az egyik eleme (sora) lehet

$$r = \{ \text{Járatszám} \mapsto 6209, \text{Honnan} \mapsto \text{Budapest}, \\ \text{Hová} \mapsto \text{London}, \text{Mikor} \mapsto 18 : 05 \}.$$

Ha rögzítjük az attribútumok sorrendjét, a jelölés egyszerűsödik:

$$r = (6209, \text{Budapest}, \text{London}, 18 : 05).$$

Ha nyilvántartjuk a pilótákat és azt is, hogy melyik járatot ki vezeti közülük, akkor az előbbiekből bővítéseként egy három táblából álló adatbázissémánk lehet, $T = \{\mathcal{P}, \mathcal{J}, \mathcal{V}\}$ táblanevekkel. Itt \mathcal{P} a pilóták adattáblájának sémája, \mathcal{V} („vezeti”) pedig egy olyan séma, amely a pilóták és a járatok közti hozzárendelésnek felel meg, előfordulásának sorai egy-egy pilóta azonosítóját és járatszámot tartalmaznak.

1.1.1. Egyed-kapcsolat diagram

A relációs adatbázissémák tervezésének legelterjedtebb modellező nyelve az *egyed-kapcsolat diagram* (pl. [14, 15, 13, 30, 32]). A nyelv nem egységes, többféle változata létezik.

A tervezés során tekintjük a valós világnak azon részét, amelyről adatokat kívánunk tárolni és *egyedosztályokat* különítünk el, *attribútumokkal* (a fenti példában egyedosztályként modellezhetjük a járatokat és a pilótákat). Az egyedosztályok közötti viszonyokat pedig *kapcsolatok* formájában modellezzük (pl. a pilóták és a járatok között kapcsolatként jelenik meg, hogy ki melyik járatot vezeti). A kapcsolatok sokfélék lehetnek, mind aritásukat (pl. bináris – két egyedosztály közötti; ternáris; kvaternáris), mind pedig a részt vevő egyedek multiplicitását tekintve (pl. egy járatot hány pilótának kell vezetnie, egy pilóta hány járatot vezethet). A bináris kapcsolatoknak három alaptípusa van: egy-egy (pl. a pilóták és a járatok között egy-egyértelmű a megfeleltetés³), egy-sok (egy járathoz egy pilóta tartozik, de egy pilóta többet is vezethet, azaz fordított irányban nincs függvénykapcsolat), sok-sok (egyik irányban sem adható függvénykapcsolat). Mi az olyan típusú kapcsolatokkal foglalkozunk, amelyek ilyen jellegű viszonyokkal megfogalmazhatók.

Az adatmodell diagram formájában készül el, mely átalakítható relációs adatbázissémává: az egyedosztályokból relációsémák lesznek, általában a kapcsolatokból is („kapcsolótábla”, pl. a fenti \mathcal{V}), de a séma gyakorta egyszerűsíthető.

1.2. Funkcionális függőségek és negáltjaik

1.2.1. Funkcionális függőségek

Az integritási megszorítások legalapvetőbb típusa a *funkcionális függőség* [2], melynek elmélete jól ismert és kidolgozott, számos fontos fogalom épül rá (kulcsok,

³Tágabb értelemben a kapcsolatban való részvétel lehet opcionális, azaz a pilótáknak és a járatoknak csak egy-egy részhalmazán értelmezett a bijekció.

dekompozíciók, normálformák; pl. [6, 7, 5, 8, 31, 32]). Egy funkcionális függőség azt jelenti, hogy a relációs adattáblában egyes attribútumok értékei másokkal függvénykapcsolatban kell legyenek, azaz egyértelműen meghatározzák azokat. Pontosabban:

Legyen \mathcal{R} egy relációséma, X és Y pedig attribútumainak egy-egy részhalmaza. Ekkor $X \rightarrow Y$ egy *funkcionális függőség*, melyet egy \mathcal{R} sémájú R reláció akkor és csak akkor *teljesít* (jel.: $R \models X \rightarrow Y$), ha

$$\forall r, s \in R : (\forall A \in X : r(A) = s(A)) \Rightarrow (\forall B \in Y : r(B) = s(B))$$

(egyszerűbben jelölve $r(X) = s(X) \Rightarrow r(Y) = s(Y)$), azaz ha két sor X -en megegyezik, akkor Y -on is. A fogalom értelemszerűen általánosítható függőségek halmazaira is.

Jelöléseinkben két attribútumhalmaz unióját $X \cup Y$ helyett XY -nal jelöljük a szokásos módon; s ahol nem okoz zavart, ott az egyetlen attribútumból álló halmazt ($\{A\}$) maga az attribútum (A) jelöli.

Kanonikus (vagy singleton) függőségnek nevezzük azt, amelynek a jobb oldalán egyetlen attribútum áll; *triviálisnak* pedig azokat tekintjük, melyeknél a jobb oldal része a bal oldalnak. *Redundánsak* azok a függőségek (ezeket lehetne akár *pszeudotriviálisnak* is nevezni), melyeknek van bal és jobb oldalukon közös attribútumuk (vagy a jobb oldaluk üres). Ezek érvényessége ekvivalens azokéval, melyeket a jobb oldalból a bal oldalra is szereplő rész kivonásával kapunk, ezért a redundáns függőségek kezelését (köztük a triviálisokét) igyekszünk majd elkerülni.

A funkcionális függőségek körében értelmezhető a *logikai következmény* fogalma. Ha ζ egy függőség és \mathcal{F} függőségek egy (véges) halmaza, akkor ζ pontosan akkor logikai következménye \mathcal{F} -nek (jel.: $\mathcal{F} \models \zeta$), ha minden R relációra

$$R \models \mathcal{F} \Rightarrow R \models \zeta.$$

Ha \mathcal{F} funkcionális függőségek egy halmaza, akkor \mathcal{F} *lezártja* alatt azt az \mathcal{F}^+ -szal jelölt halmazt értjük, mely \mathcal{F} logikai következményeit tartalmazza:

$$\mathcal{F}^+ = \{\delta = X \rightarrow Y \mid \mathcal{F} \models \delta\}.$$

\mathcal{F} *zárt*, ha $\mathcal{F} = \mathcal{F}^+$.

1.2.2. Negált funkcionális függőségek

Egy adatbázis tervezésekor a valós világot modellezzük, s egyes jelenségek funkcionális függőségek formájában kerülnek be a modellbe (erre még később visszatérünk). A tervezés közben a függőségi rendszert finomítjuk, azaz egyre több függőséget veszünk hozzá a halmazhoz. Így minden lépésben nyitott kérdés, hogy azok a lehetséges függőségek, melyek még nem szerepelnek a halmazban, vajon igazak-e vagy sem. Egy adott lehetséges függőség vizsgálatakor kétféle módon derülhet ki, hogy be kell vennünk a modellbe: a vizsgált függőség logikai következménye az

eddigieknek, ezért igaz; vagy a vizsgált függőséget a valós világgal összevetve azt találjuk, hogy szükségképpen igaznak kell deklarálnunk a modellben.

A vizsgálat viszont azt is eredményezheti, hogy a függőség nem szükségképpen igaz, azaz a majdani adatbázisban meg kell engednünk, hogy a függőségre ellenpélda legyen: két olyan sor, amely a bal oldálnak megfelelő attribútumokon megegyezik, de a jobb oldálnak megfelelőeken különbözik. Ennek figyelembe vételéhez a funkcionális függőségek mellett ún. *negált függőségeket* is kezelünk, melyek $X \nrightarrow Y$ alakúak. Egy ilyen nem integritási megszorításként értelmezendő, hiszen nem írja elő, hogy az adatbázisnak csak olyan állapotai lehetnek, melyben találunk ellenpéldát az $X \rightarrow Y$ függőségre. Ehelyett a tervezési fázisban van szerepe, és azt fejezi ki, hogy nem írhatjuk elő az $X \rightarrow Y$ függőséget, azaz a tervezés végén előállítandó funkcionális függőségi rendszernek csak olyan halmaz fogadható el, melyben az adott függőség nem szerepel. A fent bevezetett *kanonikus (singleton)* és *redundáns* fogalmakat értelemszerűen általánosíthatjuk a negált függőségekre.

A funkcionális függőségeket ezzel összefüggésben gyakran *pozitív* függőségeknek nevezzük, míg a negált függőségeket *negatív*oknak. Egy rögzített megszámlálható attribútumszimbólum-készlet felett kifejezhető összes funkcionális függőség univerzumát jelöljük \mathbb{D} -vel, a negált függőségek univerzumát pedig \mathbb{E} -vel. Egy adott ζ pozitív (vagy negatív) függőség *negáltja* alatt a neki megfelelő negatív (ill. pozitív) függőséget értjük (azaz amelynek jobb és baloldala megegyezik ζ -val, de ellenkező értelmű), és $\neg\zeta$ -val jelöljük. Ezt a jelölést értelemszerűen általánosíthatjuk függőségek halmazaira. Egy $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{D} \cup \mathbb{E}$ függőségi halmaz egy adott attribútumhalmazra nézve *teljes*, ha nem tartalmaz egyszerre egy függőséget és annak negáltját, továbbá a $\mathcal{F} \cap \mathbb{D} \cup \neg(\mathcal{F} \cap \mathbb{E})$ halmaz éppen az adott attribútumhalmaz felett felírható összes lehetséges funkcionális függőséget tartalmazza (azaz minden lehetséges függőségre a halmaz megadja, hogy a modellben igaz-e vagy sem).

Egy $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{D} \cup \mathbb{E}$ függőségi halmaz *lehetséges kiterjesztése* minden olyan $\mathcal{G}^+ \subset \mathbb{D}$ zárt funkcionális függőségi halmaz, melyre

$$\mathcal{F} \cap \mathbb{D} \subseteq \mathcal{G}^+ \quad \text{és} \quad \neg(\mathcal{F} \cap \mathbb{E}) \cap \mathcal{G}^+ = \emptyset$$

(azaz tartalmazza \mathcal{F} pozitív függőségeit, de nem tartalmazza \mathcal{F} negatív függőségeinek negáltjait). A definícióban szereplő \mathcal{G}^+ halmazok valójában azok a lehetséges függőségi rendszerek, melyek \mathcal{F} finomításával (további függőségek hozzávételével, teljessé tétellel) megkaphatók, azaz a tervezés adott fázisában lehetséges kimeneteknek tekinthetők.

Pozitív és negatív függőségek együttes kezelésekor a logikai következmény fogalmát másképpen kell értenünk. Tegyük fel, hogy $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{D} \cup \mathbb{E}$ egy (véges) függőségi halmaz, és $\zeta \in \mathbb{D} \cup \mathbb{E}$ egy függőség. Ekkor ζ pontosan akkor *logikai következménye* \mathcal{F} -nek, ha minden lehetséges $\mathcal{G}^+ \subset \mathbb{D}$ kiterjesztésére teljesül, hogy $\zeta \in \mathcal{G}^+$, amennyiben ζ pozitív; illetve $\neg\zeta \notin \mathcal{G}^+$, amennyiben ζ negatív. Könnyű látni, hogy ha ζ pozitív, és $\mathcal{F} \subset \mathbb{D}$, akkor ez éppen ugyanazt jelenti, mint a korábban definiált következményfogalom. A *lezárás* fogalma újraértelmezhető ezzel a logikai következményfogalommal.

Egy \mathcal{F} függőségi halmaz *ellentmondásos*, ha nem létezik lehetséges \mathcal{G}^+ kiterjesztése. Ekkor \mathcal{F} -nek logikai következménye bármilyen függőség, így egyidejűleg valamely $X \nrightarrow Y$ és $X \rightarrow Y$ függőség is. Ennek vizsgálata, felismerése fontos a tervezés során, hiszen ilyenkor valami hibát vétettünk a modellezésben és finomítással nem tudunk eljutni érvényes, teljes függőségi rendszerhez.

1.2.3. Afunkcionális függőségek

Az imént bevezetett negált függőségfogalomnál létezik egy erősebb szemantikájú is, mely azt fejezi ki, hogy az adatbázisban mindig lennie kell olyan soroknak, melyek egy adott funkcionális függőséget megsértenek. Az ilyet *afunkcionális* függőségnek nevezzük [9].

Az afunkcionális függőségek számunkra kevésbé érdekesek, de az alábbi összefüggés rámutat arra, hogy formálisan azonosan kezelhetők a mi negált függőségeinkkel, hiszen a logikai következményfogalom a két esetben ekvivalens:

1.1. ÁLLÍTÁS. Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{D} \cup \mathbb{E}$ egy véges halmaz és $\zeta \in \mathbb{E}$ egy negált függőség. Ekkor $\mathcal{F} \models \zeta$ ekvivalens a következővel: minden olyan R relációban, amelyre $R \models \mathcal{F} \cap \mathbb{D}$, de $\forall \delta \in \mathcal{F} \cap \mathbb{E} : R \not\models \neg \delta$, igaz az is, hogy $R \models \neg \zeta$ (azaz ha R kielégíti \mathcal{F} pozitív függőségeit, és van benne ellenpélda \mathcal{F} negatív függőségeinek negáltjaira – így a nekik megfelelő afunkcionális függőségeket R kielégíti –, akkor kell lennie ellenpéldának $\neg \zeta$ -ra is – s így a ζ -nak megfelelő afunkcionális függőség teljesül).

Bizonyítás. Az ekvivalencia egyik irányának igazolásához tegyük fel, hogy $\mathcal{F} \models \zeta$, és R egy olyan reláció, amely \mathcal{F} minden pozitív függőségét kielégíti, de minden negatív függőségének negáltjára található R -ben ellenpélda (cáfoló két sor). Indirekt módon tegyük fel, hogy $R \models \neg \zeta$, azaz nincs ellenpélda $\neg \zeta$ -ra. Ekkor tekintsük azt a $\mathcal{G}^+ \subset \mathbb{D}$ függőségi rendszert, mely pontosan azokat a funkcionális függőségeket tartalmazza, melyeket R kielégít. $R \models \neg \zeta$, ezért $\neg \zeta \in \mathcal{G}^+$. Ugyanakkor ez a \mathcal{G}^+ zárt, és R választása miatt \mathcal{F} egy lehetséges kiterjesztése, így ellentmondásra jutunk azzal, hogy $\mathcal{F} \models \zeta$.

A másik irányhoz vegyünk egy olyan $\mathcal{G}^+ \subset \mathbb{D}$ zárt funkcionális függőségi rendszert, mely \mathcal{F} egy lehetséges kiterjesztése. Ahhoz, hogy megmutassuk $\mathcal{F} \models \zeta$ -t, meg kell mutatnunk, hogy $\neg \zeta \notin \mathcal{G}^+$. Ehhez vegyük a \mathcal{G}^+ egy R Armstrong-relációját [26, 4, ?], azaz egy olyan relációt, amely éppen \mathcal{G}^+ függőségeit elégíti ki. Mivel R attribútumain felírható minden más funkcionális függőségre lesz ellenpélda R -ben, így a \mathcal{F} -ben szereplő negatív függőségek negáltjaira is, a feltétel (a bizonyítandó ekvivalencia másik oldala) szerint lesz ellenpélda $\neg \zeta$ -ra is. Emiatt $R \not\models \neg \zeta$, amely éppen azt jelenti, hogy $\neg \zeta \notin \mathcal{G}^+$, mivel R Armstrong-reláció. \square

1.2.4. A függőségek hagyományos axiomatizációja

A funkcionális függőségek ismert helyes és teljes következtetési szabályrendszere az alábbi, ún. *Armstrong-axiómarendszer* [2]:

$$(0) \quad XY \rightarrow Y$$

$$(1) \quad \frac{X \rightarrow Y}{XVW \rightarrow YV}$$

$$(2) \quad \frac{X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z}{X \rightarrow Z}$$

Negált függőségek esetén az axiomatizációt az alábbi levezetési szabályokkal bővítve kapjuk a *kiterjesztett Armstrong-axiómarendszert*⁴, mely úgyszintén helyes és teljes [30]:

$$(3) \quad \frac{X \rightarrow Y, X \not\rightarrow Z}{Y \not\rightarrow Z}$$

$$(4) \quad \frac{X \not\rightarrow Y}{X \not\rightarrow YZ}$$

$$(5) \quad \frac{XZ \not\rightarrow YZ}{XZ \not\rightarrow Y}$$

$$(6) \quad \frac{X \rightarrow Z, X \not\rightarrow YZ}{X \not\rightarrow Y}$$

$$(7) \quad \frac{Y \rightarrow Z, X \not\rightarrow Z}{X \not\rightarrow Y}$$

A (3) és (7) szabályok a (2) lehetséges megfordításai, a (4) és (5) pedig az (1) megfordításaként tekinthetők. A (6) szabály az alábbi összevonási szabály megfordítása, mely az (1) és a (2) szabály alapján következik:

$$(8) \quad \frac{X \rightarrow Y, X \rightarrow Z}{X \rightarrow YZ}$$

Egy axiómarendszerrel történő *levezethetőség* általában a \vdash szimbólum jelöli, a mi esetünkben például $\mathcal{F} \vdash \delta$ azt jelenti, hogy az \mathcal{F} függőségi halmazból valamely (helyes és teljes) szabályrendszerrel levezethető a δ függőség. Mivel többféle axiomatizációt vezetünk be, jelezni fogjuk azt is, hogy mely rendszerben értendő a levezethetőség. Így az eredeti Armstrong-rendszerben történő levezethetőséget a \vdash_A , a kiterjesztett Armstrong-rendszerbelit pedig a \vdash_{EA} fogja jelölni. Hasonlóképpen, a később bevezetett axiomatizációknál értelemszerű indexeket fogunk használni.

Tekintsünk egy példát a fenti szabályrendszerrel való következtetésre. Tegyük fel, hogy egy $\{\text{Járat}, \text{Pilóta}, \text{Idő}\}$ relációséma repülőjáratok és az azokat vezető pilóták összerendelésének sémáját írja le, most az idő feltüntetésével. A séma szintjén előírjuk, hogy egy pilóta egyidőben csak egy járatot vezethet: $\text{Idő Pilóta} \rightarrow \text{Járat}$; továbbá azt is, hogy egy járatot egy időben csak egy pilóta vezet (a másodpilótát nem jegyezzük be ide): $\text{Járat Idő} \rightarrow \text{Pilóta}$. Ha ezek után azt is előírnánk, hogy egy járat egy meghatározott időben megy, akkor a $\text{Járat} \rightarrow \text{Idő}$ függőséget kellene hozzávennünk a halmazhoz. Ez esetben a fenti szabályrendszerrel levezethetjük az implikált függőségeket. Első lépésben az (1) bővítési szabállyal megkapjuk a $\text{Járat Pilóta} \rightarrow \text{Idő}$ függőséget. Ezek után viszont nem tudunk úgy szabályt alkalmazni, hogy egy lépésben ne triviális vagy közel triviális eredményt kapjunk. Így pl. megkaphatjuk a bővítési szabály újbóli alkalmazásával a $\text{Járat} \rightarrow \text{Járat Idő}$ függőséget, mely nem ad új információt, viszont most már alkalmazhatjuk a (2)

⁴Ha negált függőségekről is szó van, akkor ezt a kiterjesztett rendszert nevezzük egyszerűen Armstrong-axiómarendszernek.

transzitivitást, melynek eredménye releváns: $Járat \rightarrow Pilóta$. Ha most megvizsgáljuk, hogy zárt-e már a halmaz, a válasz természetesen *nem*, hiszen még levezethető pl. $Járat \rightarrow Járat$, $Járat \rightarrow Járat Pilóta$, $Járat \rightarrow Idő Pilóta$, ... Bár ez utóbbiak ismét redundánsak (a korábban levezetettekhez képest nem hordoznak új információt), általános esetben nem könnyű látni, hogy rajtuk keresztül kaphatunk-e még releváns függőséget. Célszerű lenne például, ha a redundáns (és különösen a triviális) függőségekkel nem kellene foglalkoznunk, hiszen azok a gyakorlatban feleslegesen bonyolítják a függőségi halmazok vizsgálatát.

1.2.5. Függőségi rendszerek megadása

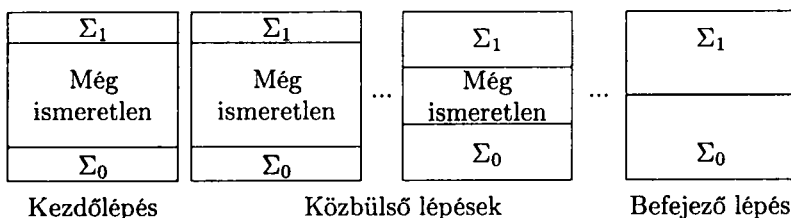
Tervezéskor – mint már említettük – fontos feladat az, hogy megállapítsuk, mely lehetséges függőségek igazak és melyek nem. Ez teszi lehetővé a teljes és egyértelmű specifikációt. Sajnos azonban nagyobb sémákra az ember nem képes áttekinteni a függőségi rendszereket, illetve a függőségek közti kapcsolatokat. Bár vannak elméleti módszerek a függőségi rendszerek kezelésére, egyelőre nem ismert olyan egyszerű reprezentáció, amely könnyen áttekinthetővé tenné a függőségek halmazait, kiemelné a hiányzó (nem specifikált érvényességű) függőségeket, illetve a függőségek közti logikai viszonyokat.

A függőségek érvényességének lépésenkénti megállapításához kétféle függőségi halmazt tarthatunk nyilván ([25, 28, 30]) – a korábban tárgyaltakkal összhangban:

A pozitív függőségek Σ_1 halmaza: Minden olyan funkcionális függőség, amelyet eleve igaznak tekintünk, illetve amelyek érvényessége következik a kezdetben megadott érvényes (pozitív) függőségekből (mint láttuk, negatívból pozitív nem következik).

A negatív függőségek Σ_0 halmaza: Minden olyan funkcionális függőség, amelyet eleve hamisnak tekintünk, illetve amelyek érvénytelensége következményként előáll a kezdetben megadott érvényes (pozitív) és érvénytelen (negatív) függőségekből kiindulva.

Ez a megközelítés az alábbi, az 1. ábrán is látható egyszerű módszerhez vezet, mely többféleképpen is finomítható; az ismert eljárások döntő többsége is ezen alapul. A módszer lényege, hogy minden lépésben egy még nem ismert érvényes-



1. ábra. Egy függőségi rendszer elkészítése lépésenként

ségű lehetséges függőséget a modellezendő valósággal összevetve megvizsgálunk, és megállapítjuk annak érvényességét vagy érvénytelenségét, majd képezzük ennek és a korábban már eldöntött függőségeknek a logikai következményeit.

1. *Kezdő lépés: Rögzítjük a kezdeti függőségeket.*
2. *Iterált lépés: Ismételjük az alábbi lépéseket, amíg a Σ_0 vagy a Σ_1 halmaz változik:*
 - *Keresünk egy α lehetséges függőséget, mely nem eleme $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ -nek.*
 - *Ha α érvényes (pozitív), akkor Σ_1 -et bővítjük α -val.*
 - *Ha α nem érvényes (negatív), akkor Σ_0 -t bővítjük α -val.*
 - *Képezzük a Σ_0 és a Σ_1 lezártját.*

1.3. A felmerülő problémák és az általunk készített reprezentáció

A funkcionális függőségek elmélete bár jól kidolgozott, a tervezési gyakorlatban gyakran csak közvetve alkalmazzák (pl. kulcsok, dekompozíciók, normálformák). Egyes esetekben viszont az egyértelmű és teljes specifikáció csak függőségi rendszer megadásával lehetséges. Ilyen például három vagy több egyedosztály kapcsolat-típusának megadása, az egyed-kapcsolat modell ugyanis meglehetősen szűk lehetőségeket kínál többágú kapcsolatok jellegének deklarálására. A bináris kapcsolat jól ismert három típusa (egy-egy, egy-sok, sok-sok) megfogalmazható funkcionális függőségekkel. Emellett azonban a ternáris vagy nagyobb arítású kapcsolatok típusait nem elemzik kellőképpen, pedig rendelkezésre áll hozzá a függőségek elmélete (a gyakorlatban ritka, hogy nagy számú, pl. ötnél több egyedosztály egy kapcsolatban részt vegyen, de a kapcsolattípusok kisebb arításokra sincsenek kellően kidolgozva). Ez esetenként többértelmű specifikációhoz vezethet, gyakrabban a kapcsolatok „binarizálásához” (a magasabb arítású kapcsolatok binárisakkal történő modellezése, közbülső egyedosztályok bevezetésével).

Ez többek között annak köszönhető, hogy a függőségeket hagyományosan egyenként kezeljük, a függőségi rendszereket pedig önálló függőségek halmazaként. A közöttük lévő kapcsolatokat viszont kezelni kell; a logikai nyelv például lehetővé teszi az implikációt, de a formalizmus használata nehézkessé válik a gyakorlatban a vizuális áttekinthetőség hiánya és a redundanciák miatt (ld. az ismertetett implikációs példát a repülőjáratokkal). Az MFDBS'87 konferencián merült fel [29], hogy ehelyett inkább függőségek halmazában, a függőségi rendszer egészében kellene gondolkodni, és megfelelő specifikációs módszert adni a függőségi rendszerekhez, mely természetes, áttekinthető módon támogatja a halmazon belüli levezetést.

Ennek nyomán a funkcionális függőségi rendszereknek egy olyan diagramos reprezentációját adjuk, mely lehetővé teszi a hagyományos jelölésnél egyszerűbb kezelésüket, áttekintésüket. A fent említett algoritmusséma a mi diagramos rendszerünkben is alkalmazható, a grafikus reprezentáció kisebb sémákra az implikált függőségek levezetését közvetlenül a diagramon is lehetővé teszi. Később látni

fogjuk, hogy a lezárás szisztematikusan elvégezhető. Ehhez a formalizmus egyszerűsítése szükséges; a hozzá kifejlesztett axiomatizáció és a levezetési algoritmus természetesen érvényes nagyobb sémákra is, bár ott a grafikus reprezentáció általánosítása bonyolulttá válik.

A lehetséges függőségek száma exponenciális az attribútumok számában [19]. Ezért az összes függőség érvényességének vagy érvénytelenségének specifikálása nem mindig valósítható meg, a tervezést korlátozzák kognitív képességeink (ezt jól példázza, hogy a grafikus reprezentáció nagyobb sémákra magasabb dimenziós terekben általánosítható egyszerűen). E probléma szorosan összefügg azzal az ismert kombinatorikai problémával, mely az MFDBS'87 konferencián merült fel ([29]), és csak részben megoldott: Egy n attribútumos sémán vajon hány különböző funkcionális függőségi rendszer (zárt halmaz) adható meg? Egy másik hasonló kérdés, hogy hányféle, funkcionális függőségekkel leírható n -ágú kapcsolat létezik (az egyed-kapcsolat diagram nyomán). Ez az előzőtől annyiban különbözik, hogy az attribútumok permutációjával egymásba vihető függőségi rendszerek azonosnak tekintendők. Kutatásunk során e problémával is foglalkoztunk, s legfeljebb 5 attribútum esetén a lehetséges függőségi rendszerek, ill. típusok számát meghatároztuk.

2. A funkcionális függőségi rendszerek szintaxisa

2.1. A függőségek alaphalmazai

Célunk egyelőre az, hogy elkerüljük a funkcionális függőségek hagyományos jelöléséből adódó redundanciákat, bevezetve egy egyszerűsített formalizmust, melyhez azután helyes és teljes következtetési szabályrendszert adunk. Az egyszerűsítés lényege, hogy eltekintünk a redundáns (és köztük a triviális) függőségektől, valamint csak kanonikus (szingleton) függőségekkel foglalkozunk.

Bevezetünk néhány további jelölést. A korábbiakkal összhangban a funkcionális függőségek alaphalmazát, továbbá a nemredundáns, illetve kanonikus (szingleton) nemredundáns funkcionális függőségek alaphalmazát jelölje rendre \mathbb{D} , \mathbb{D}^+ és \mathbb{D}_c^+ . Hasonlóan, \mathbb{E} , \mathbb{E}^+ és \mathbb{E}_c^+ jelöli az általános negált, a nemredundáns negált és a nemredundáns negált kanonikus (szingleton nemredundáns negált) függőségek alaphalmazát. Az Armstrong-rendszer alaphalmazai – mint láttuk – $\mathbb{D} \cup \mathbb{E}$, ezt fogjuk egyszerűsíteni $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}_c^+$ -ra. A függőségekre és halmazaikra vonatkozóan bevezetett fogalmakat (lezárt, zárttság, teljesség, lehetséges kiterjesztés, logikai következmény) mindig az éppen adott univerzum fölött tekintjük, a levezethetőséget pedig jelölni fogjuk, hogy mely axiómarendszerben értendő.

Anélkül, hogy érdemi kifejezőerőt veszítenénk, rendszerünkben kihagyhatjuk a redundáns függőségeket (gondolva itt mind a pozitívakra; mind a negatívakra), azaz amelyek jobb és bal oldalán van közös attribútum, vagy a jobb oldaluk üres. Ezen kívül a nem kanonikus pozitív funkcionális függőségeket is elhagyhatjuk, hiszen

azok helyettesíthetők több kanonikus függőséggel.⁵ Sajnos azonban a bemutatott, kiterjesztett Armstrong-axiómarendszer nem felel meg ezeknek a megszorításoknak. Meg fogjuk mutatni, hogy egy vele ekvivalens rendszer készíthető (ld. később az ST és NST rendszert, illetve az 5.1. és 5.3. tételt) az egyszerűsített formalizmusra. Kiderül, hogy nincs szükség redundáns függőségek levezetésére ahhoz, hogy egy függőségi halmaz összes nemredundáns következményét levezessük. Így az első, közbülső egyszerűsítő lépés az eredeti univerzum $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}^+$ -re való megszorítását jelenti, továbbá azt, hogy egy $\mathbb{D} \cup \mathbb{E}$ fölötti tetszőleges, véges \mathcal{F} függőségi halmaz helyett a vele $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}^+$ fölött ekvivalens

$$\begin{aligned} \mathcal{F}' = & \{V \rightarrow C \mid \exists W : V \rightarrow W \in \mathcal{F}, C \in W \setminus V\} \cup \\ & \cup \{V \rightarrow U \mid \exists W : V \rightarrow W \in \mathcal{F}, U = W \setminus V\} \end{aligned}$$

függőségi halmazzal dolgozunk.

Az egyszerűsítés második lépése a nemsingleton negált függőségek (negált nemkanonikus függőségek) elhagyása. Bár ez a kifejezőerő valódi megszorítását jelenti, ennek a ténynek kevés gyakorlati jelentősége van. A nemsingleton negált függőségek ugyanis vagylagosságot fejeznek ki: pl. $X \nrightarrow AB$ azt jelenti, hogy vagy $X \rightarrow A$, vagy $X \rightarrow B$ (vagy mindkettő) érvényes. Nyilvánvaló, hogy egy teljes függőségi halmazban az ilyen vagylagosságok redundánsak, hiszen minden lehetséges elemi, azaz kanonikus függőségre meg van határozva, hogy érvényes-e vagy sem – utóbbi esetben a negált szerepel a halmazban. Ha pedig az ilyen függőségek jobb oldala más függőségek miatt nem egyszerűsíthető le egyattribútumosra, azaz sem $X \rightarrow A$, sem $X \rightarrow B$ nem vezethető le, akkor csupán információhiányt vonhatunk le következtetésként: nem tudjuk eldönteni, hogy a két pozitív függőség közül egyáltalán igaz lehet-e valamelyik (csak azt tudjuk, hogy mindkettő egyszerre nem igaz).⁶ Figyelembe véve, hogy sématervezéskor a cél egy teljes rendszerhez való eljutás, és a kezdeti halmazban általában nem szerepelnek ilyen nemsingleton negált függőségek, elfogadhatjuk, hogy elhagyásukkal a függőségek kifejezőerejét csekély módon csökkentjük. Ez a második egyszerűsítő lépés formálisan az alaphalmaz $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}_c^+$ -re való megszorítását jelenti, azaz az előzőekhez képest csak olyan függőségi halmazokkal foglalkozunk, melyekben nem szerepel $V \nrightarrow W$, $|W| > 1$ alakú negált függőség.

A kiterjesztett Armstrong-axiómarendszer lehetővé teszi, hogy a $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}_c^+$ alaphalmazon kívül eső függőségeket is levezessünk még olyan halmazból indulva is ki, mely része ezen alaphalmaznak. Garantálnunk kell tehát, hogy ezek a közbülső eredmények ne legyenek szükségesek ahhoz, hogy $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}_c^+$ -beli következményeket vezessünk le. Látni fogjuk, hogy készíthető olyan szabályrendszer, mellyel minden singleton következmény levezethető nemsingleton részeredmények nélkül, ha a kezdeti függőségi halmaz csak singleton függőségeket tartalmaz. Ez lesz majd a PQIRST axiómarendszer, melynek megvan az az előnyös tulajdonsága is, hogy

⁵Például az $X \rightarrow AB$ függőség helyettesíthető $X \rightarrow A$ -val és $X \rightarrow B$ -vel.

⁶Ha például a zárt világ feltételezést alkalmazzuk, akkor pedig az a konklúzió, hogy egyik sem igaz.

a szabályok alkalmazásának van egy kötött sorrendje, mely minden esetben teljes lezárást eredményez, azaz minden következmény levezethető úgy is, hogy a szabályokat csak egy előre megadott sorrendben alkalmazzuk.

2.2. A Dimenzió fogalma

Egy $X \rightarrow A \in \mathbb{D}_c^+$ funkcionális függőségre definiáljuk annak *dimenzióját*, melyet $[X \rightarrow A]$ -val jelölünk:

$$[X \rightarrow A] \stackrel{\text{def}}{=} |X|$$

(a dimenzió negált függőségekre hasonlóan definiálható). Egy A attribútumra is értelmezzük a dimenzió fogalmát, adott $\mathcal{F} \subset \mathbb{D}_c^+$ függőségi halmaz mellett:

$$[A]_{\mathcal{F}} \stackrel{\text{def}}{=} \min_{X \rightarrow A \in \mathcal{F}^+} |X|,$$

ahol \mathcal{F}^+ az \mathcal{F} lezártja a \mathbb{D}_c^+ fölött, azaz

$$\mathcal{F}^+ = \{\delta \in \mathbb{D}_c^+ \mid \mathcal{F} \models \delta\}.$$

A definíciót kibővítjük arra az esetre is, ha \mathcal{F}^+ -ban nincs $X \rightarrow A$ alakú függőség, ekkor

$$[A]_{\mathcal{F}} \stackrel{\text{def}}{=} \infty.^7$$

A dimenzió fogalma megkönnyíti a függőségi halmazok kezelését, csoportosítását, szoros kapcsolata van a grafikus reprezentációval, és a következtetési szabályok alkalmazási sorrendjénél is van szerepe.

3. A függőségi halmazok száma

Jelölje n a séma attribútumainak számát, az \mathcal{SD}_n -nel jelölt halmaz pedig tartalmazza az összes olyan érvényes (zárt, ellentmondásmentes) funkcionális függőségi halmazt, melyben a függőségek bal oldala nem üres.⁸ Definiálunk egy τ ekvivalenciarelációt ezen a halmazon oly módon, hogy két függőségi halmazt akkor tekintünk ekvivalensnek, ha létezik az attribútumok egy olyan permutációja, mely az egyik halmazt a másikba viszi át. Az ekvivalenciaosztályok (a függőségi rendszerek *típusai* v. *esetei*) halmazát \mathcal{SD}_n/τ jelöli, ennek a méretére koncentrálunk. Ha

⁷Ezt az esetet definiálhatnánk úgy is, hogy $[A] = n$ (ahol n a séma attribútumainak száma). A ∞ jelölés viszont hangsúlyozza, hogy A független a többi attribútumtól, továbbá maga a dimenzió definíciója függetlenné válik n -től.

⁸Ennek a megköthetésnek a sématervezésben van szerepe. Például egy egyed-kapcsolat modellben a többgú kapcsolatoknak megfeleltethetünk függőségi halmazokat (ha a multiplicitások megfelelő alakúak, és a kapcsolatokban lehetnek belső multiplicitási megszorítások is), s ilyenkor nem fordulnak elő konstans attribútumokat megadó függőségek.

megengedjük azokat a függőségeket is, amelyek konstansnak deklarálnak egy-egy attribútumot (azaz üres halmaz áll bal oldalukon), akkor egy bővebb halmazt kapunk, melyet \mathcal{SD}_n^0 jelöl, ennek különböző eseteit pedig \mathcal{SD}_n^0/τ . Könnyen látható, hogy

$$|\mathcal{SD}_{n+1}^0/\tau| = |\mathcal{SD}_{n+1}/\tau| + |\mathcal{SD}_n^0/\tau|$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}^+$ -ra.

Ezekkel a jelölésekkel táblázatba foglaltuk a lehetséges függőségi halmazok és esetek számát, öt vagy annál kevesebb attribútum esetén. Az eredményeket egy PROLOG program segítségével kaptuk [22], mely az (S) és (T) szabályokra, s azok alkalmazási sorrendjére épül (ld. 5.1. tétel). Magukat a lehetséges eseteket is tartalmazza [22] – amennyire a terjedelem engedi.

Egyelőre nyitott kérdés maradt az ötnél több attribútumot tartalmazó függőségi halmazok lehetséges száma.

n	$ \mathcal{SD}_n $	$ \mathcal{SD}_n/\tau $	$ \mathcal{SD}_n^0 $	$ \mathcal{SD}_n^0/\tau $
1	1	1	2	2
2	4	3	7	5
3	45	14	61	19
4	2 271	165	2 480	184
5	1 373 701	14 480	1 385 552	14 664

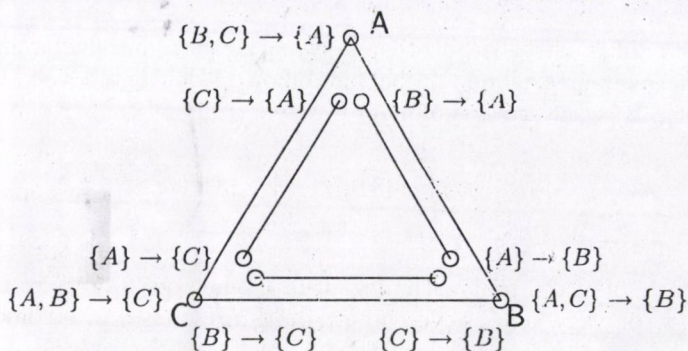
1. táblázat. n attribútumos sémák lehetséges zárt függőségi halmazainak száma.

4. Funkcionális függőségi rendszerek ábrázolása diagramokon

A függőségi rendszerek ábrázolására már fejlesztettek ki módszereket. Ilyen például [3] vagy [33] gráfelméleti megközelítése. Ezek és a hasonló módszerek nem terjedtek el a gyakorlatban, főként azért, mert bonyolultabb függőségi rendszerek esetén kevésbé áttekinthetők. A háromattribútumos esetre [11] javasol egy lehetséges diagramot, amely azonban redundáns, és nem általánosítható nagyobb sémákra. A mi jelölésünk valamelyest egyszerűbb; könnyen látható rajta, mely függőségek igazak és melyek nem, ezen kívül következtetésre is alkalmas.

4.1. Háromszöges reprezentáció

A 2. ábrán láthatjuk a diagram sémáját három attribútum esetén. Ebben az esetben alapvetően kétféle függőséget különböztetünk meg. A függőségeket a háromszög csúcspontjai és a mellé rajzolt szakaszok (külön élek) végpontjai reprezentálják:



2. ábra. Háromszöges diagram háromattribútumos sémák funkcionális függőségi rendszereinek ábrázolásához. A különálló szakaszok: a háromszögök: belülre vagy kívülre egyaránt rajzolhatók

- *Egydimenziós függőségek (a bal oldal egy attribútumot tartalmaz):*
Az $\{A\} \rightarrow \{B\}$ függőség például ilyen, a diagramon a háromszög AB éle mentén lévő szakasz (mint egydimenziós alakzat) B felőli végpontja reprezentálja.
- *Kétdimenziós függőségek (két attribútum a bal oldalon):*
Például az $\{A, B\} \rightarrow \{C\}$ függőség tartozik ebbe a csoportba, ennek a háromszög (kétdimenziós alakzat) C felőli csúcsa felel meg a diagramon.

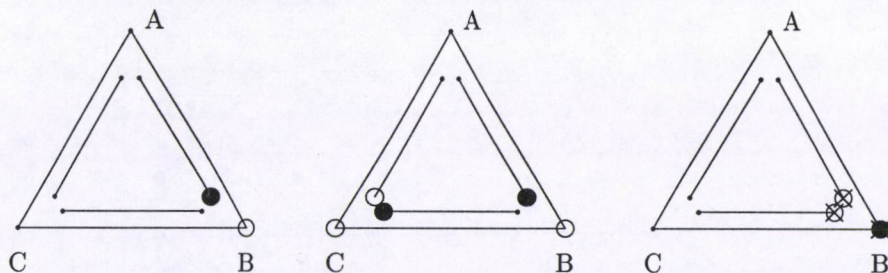
Ha egy függőség érvényes, azt a neki megfelelő csúcspontba rajzolt körrel ábrázoljuk. Áthúzott körrel jelöljük, ha tudjuk, hogy az adott függőség nem (vagy nem mindig) teljesül, azaz a neki megfelelő negált függőség eleme a függőségi rendszernek. Kis körrel jelöljük, ha egy függőség érvényessége nem állapítható meg a kiindulási halmaz alapján. Ha negatív függőségeket nem kezelünk és lezártuk a pozitív függőségek halmazát, a fennmaradó csúcsokra szintén kis körök kerülhetnek.

Az implikációt is figyelembe véve összességében az alábbi jelöléseket alkalmazhatjuk a diagramon:

- A kezdetben megadott függőségeket *tele körökkel*,
- az implikált függőségeket *üres körökkel*,
- a kezdeti negált függőségeket *áthúzott tele körökkel* (vagy kis körökkel) és
- az implikált negált függőségeket *áthúzott üres körökkel* (vagy kis körökkel) jelöljük.

Néhány példát láthatunk a 3. ábrán. A bal oldali az $\{A\} \rightarrow \{B\}$ függőséget ábrázolja az $\{A, C\} \rightarrow \{B\}$ implikált függőséggel. A középsőn az

$$\{A\} \rightarrow \{B\}, \quad \{B\} \rightarrow \{C\}$$



3. ábra. Példák a háromszöges reprezentációra

függőségek és következményeik, a jobb oldali háromszögön pedig az $\{A, C\} \rightarrow \{B\}$ negált függőség és $\{A\} \rightarrow \{B\}$, $\{C\} \rightarrow \{B\}$ következményei láthatók.

Az összes lehetséges eset diagramját [22] tartalmazza.

4.2. Általánosítás több attribútumra

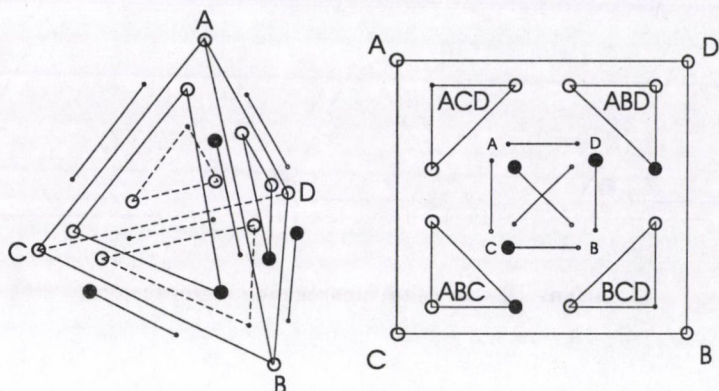
A fenti háromszöges reprezentáció általánosítható több attribútumot tartalmazó sémákra is. Két irány képzelhető el.

A dimenziófogalmat követve magasabb dimenziós terekben folytatható az építkezés a háromszöges alapon: pl. négy attribútum esetén *tetraéderes* reprezentáció adható a háromdimenziós térben. Ilyenkor a diagram egy tetraéderből, négy háromszögből (beágyazott háromattribútumos részek) és hat szakaszból (élből) áll (beágyazott bináris részek).

A másik lehetséges irány az, hogy síkban maradunk: a tetraéder négyzetre történő kicserélésével és a többi elem megfelelő elrendezésével kapjuk a *négyzetes* reprezentációt. A párhuzamosság és az irányok figyelembe vételével könnyen végiggondolható, mely síkidom mely csúcsa minek felel meg a tetraéderes reprezentációban.

A négyattribútumos esetre láthatunk példát a 4. ábrán (az implikációt később taglaljuk).

A konstrukció általánosítható 5 attribútumra is. A kombinatorikus robbanás miatt azonban az attribútumok számának növelésével a reprezentáció bonyolulttá válik, több geometriai alakzatra van szükség. n attribútum esetén a viszonylag egyszerű struktúrájú, szimmetrikus reprezentáció az $n - 1$ dimenziós térben létezik – ennek átvitele két dimenzióba a szimmetriák megtartásával nem lehetséges. A nagyobb sémák bonyolultsága az attribútumok csoportosításával, dekomponálásával kezelhető, vagy az egész séma helyett egyes translációk ([17], [18]) ábrázolásával. A [23] cikkben bemutatunk egy példát, mely az attribútumok csoportosítására épül. Az ilyen lehetőségek részletesebb vizsgálata további kutatómunkát igényel, összefüggésben a kis sémák már ismert lehetséges függőségi rendszereinek kategorizálásával, jellemzésével.



4. ábra. A $\{B \rightarrow C, B \rightarrow D, B \rightarrow A, AD \rightarrow B, AC \rightarrow B\}$ által generált rendszer tetraédres és négyzetes reprezentációja.

Ha üres bal oldalú függőségek is megengedettek (azaz konstans attribútumok is megadhatók), akkor a diagramokat attribútumonként egy-egy további ponttal kell bővíteni, mely nulla dimenziós elemként éppen ezen függőségek reprezentációját teszi lehetővé. A szabályok grafikus mintáit is bővíteni kell az $Y = \emptyset$ esettel, mely könnyen elvégezhető.

5. Axiómarendszerek

5.1. Az ST és a PQRST axiómarendszer

Az alábbi levezetési szabályokban és axiómában Y egy attribútumhalmazt jelöl (mely akár üres is lehet), A , B és C pedig olyan, páronként különböző attribútumokat, melyek nem szerepelnek Y -ban.

$$\begin{array}{lll}
 (S) \quad \frac{Y \rightarrow B}{YC \rightarrow B} & (T) \quad \frac{Y \rightarrow A, YA \rightarrow B}{Y \rightarrow B} & (P) \quad \frac{YC \nrightarrow B}{Y \nrightarrow B} \\
 (Q) \quad \frac{Y \rightarrow A, Y \nrightarrow B}{YA \nrightarrow B} & (R) \quad \frac{YA \rightarrow B, Y \nrightarrow B}{Y \nrightarrow A} & (\square) \quad \neg(Y \rightarrow B, Y \nrightarrow B)
 \end{array}$$

Ha a dimenzionalitásra gondolunk, láthatjuk, hogy a szabályok Y méretének megfelelő dimenziójú függőségeken dolgoznak, beleértve esetleg eggyel nagyobb dimenziójúakat is. Ennek a ténynek fontos szerepe van a függőségek grafikus repre-

zentációiban való következtetésben, valamint a szabályok alkalmazási sorrendjének finomhangolásában. A szabályok Y különböző méretei mellett különböző dimenziójú eseteket jelölnek, melyek a grafikus reprezentációban könnyen felismerhetők és alkalmazhatók. Az (S) szabályt kiterjesztési szabálynak, a (T)-t pedig redukciós vagy forgatási szabálynak nevezhetjük. Pozitív (nem negált) függőségekre belátható, hogy ha először csak az (S)-t alkalmazzuk ameddig lehet, majd utána ugyanígy a (T)-t, megkapjuk az összes következményt (ld. az 5.1. tételt lejjebb). Ezt finomíthatjuk azzal, hogy (S)-t először alacsonyabb dimenzióban, majd fokozatosan magasabb dimenzióban alkalmazzuk, a (T) alkalmazását pedig a lehető legmagasabb dimenzióban kezdjük, s haladunk a legalacsonyabb felé. Ezt használtuk föl arra, hogy legeneráljuk, és összeszámoljuk a különböző eseteket (a függőségi halmazok típusait) négy ill. öt attribútum esetén (ld. 4. fejezet).

Ha negált függőségek is vannak, ehhez hozzá kell vegyük a (P), (Q) és (R) szabályokat is, mint az (S) és (T) negáltjait. A (\square) szimbolikusan azt fogalmazza meg, hogy „ \rightarrow ” épp a „ \rightarrow ” negáltja, azaz egy ellentmondásos függőségi halmazból levezethető a $\neg(\square)$. Mint fent, itt is kapunk a szabályok alkalmazására egy teljes módszert; melynek során minden egyes szabályt annyiszor alkalmazunk, ahányszor csak lehet, s utána térünk rá a következő szabályra. A sorrend: (S), (T), (R), (P), (Q); de (P) és (Q) felcserélhető.

Megjegyezzük, hogy csak singleton, nemredundáns függőségekkel foglalkozunk. A szabályok alkalmazásával nem is léphetünk ki ebből a körből. Ez igaz mind a pozitív, mind a negált függőségekre.

A bemutatott szabályokból az alábbi két axiómarendszert definiáljuk; az elsőt funkcionális függőségekre, a másodikat arra az esetre, amikor pozitív és negált függőségek is előfordulnak:

- *ST axiómarendszer:* a \mathbb{D}_c^+ alaphalmazon, az (S) és (T) szabályokkal (az Armstrong-rendszerbeli (0)-nak megfelelő axiómaséma nincs),
- *PQRST axiómarendszer:* a $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}_c^+$ alaphalmazon, az összes szabállyal és a (\square) szimbolikus axiómával, mely az ellentmondásosság jelzésére szolgál.

Ezek a rendszerek helyesek és teljesek alaphalmazukon. Ezt és a szabályok említett alkalmazási sorrendjét fogalmazza meg az alábbi két tétel.

5.1. TÉTEL. Legyen \mathcal{F} a \mathbb{D}_c^+ egy véges részhalmaza, továbbá $\delta \in \mathbb{D}_c^+$.

- (i) Az ST axiómarendszer helyes és teljes a \mathbb{D}_c^+ alaphalmaz fölött, azaz $\mathcal{F} \vdash_{ST} \delta \iff \mathcal{F} \models \delta$.
- (ii) Ha $\mathcal{F} \vdash_{ST} \mathcal{G}$ egy véges $\mathcal{G} \subset \mathbb{D}_c^+$ függőségi halmazra, akkor \mathcal{G} összes eleme levezethető \mathcal{F} -ből az (S) és (T) szabályok alkalmazásával úgy, hogy (S) egyetlen alkalmazását sem előzi meg (T) alkalmazása.

5.2. TÉTEL. Legyen \mathcal{F} a $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}_c^+$ egy véges részhalmaza, továbbá $\delta \in \mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}_c^+$.

- (i) A PQRST axiómarendszer a (\square) nélkül helyes $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}_c^+$ fölött, és teljes minden ellentmondásmentes \mathcal{F} -re, azaz $\mathcal{F} \vdash_{PQRST} \delta \iff \mathcal{F} \models \delta$, ha

\mathcal{F} ellentmondásmentes. Ezen kívül, $\neg(\Box)$ levezethető akkor és csak akkor, ha \mathcal{F} ellentmondásos.⁹

- (ii) Ha $\mathcal{F} \vdash_{PQRST} \mathcal{G}$ egy véges $\mathcal{G} \subset \mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}_c^+$ függőségi halmazra, akkor \mathcal{G} összes eleme levezethető \mathcal{F} -ből az (S), (T), (R), (P), (Q) szabályok alkalmazásával oly módon, hogy (R) egyetlen alkalmazását sem előzi meg (P) és (Q) alkalmazása, (T) alkalmazását nem előzi meg (R) alkalmazása, valamint (S) alkalmazását nem előzi meg (T) alkalmazása. Ezen kívül, ha $|\mathcal{G}| = 1$, akkor (R)-et elegendő egyszer alkalmazni.

A tételek bizonyítása az Armstrong-axiómarendszer \mathbb{D} fölötti és a kiterjesztett változat $\mathbb{D} \cup \mathbb{E}$ fölötti helyességén és teljességén múlik. A következőkben kiterjesztjük az alaphalmazt a nemszingleton negált függőségekkel (így $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}^+$ -t kapunk), s bevezetünk egy másik axiómarendszert, az NST-t. Belátható, hogy ez ekvivalens a PQRST-val az eredeti, szűkített alaphalmazra ($\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}_c^+$) nézve. Ezek után bevezetjük az U és UE szabályrendszereket, melyek rendre ekvivalensek az ST-val és az NST-vel. Végül az U és UE rendszereket hasonlítjuk össze az eredeti Armstrong- és a kiterjesztett Armstrong-axiómarendszerekkel, így válik teljessé a bizonyítás menete.

5.2. Az NST axiómarendszer mint a PQRST bővítése

Az alaphalmazt kibővítjük $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}^+$ -re.

Az alábbi szabályrendszerben Y , Z és W páronként diszjunkt attribútumhalmazokat jelölnek (melyek üresek is lehetnek azzal a megkötéssel, hogy a negált függőségek jobb oldalai nem lehetnek teljesen üresek), továbbá A , B és C különböző attribútumok, melyek nem fordulnak elő a velük egy szabályban szereplő halmazokban.

$$(S) \quad \frac{Y \rightarrow B}{YC \rightarrow B}$$

$$(T) \quad \frac{Y \rightarrow A, YA \rightarrow B}{Y \rightarrow B}$$

$$(NS) \quad \frac{YC \nrightarrow Z}{Y \nrightarrow Z}$$

$$(NT1) \quad \frac{Y \rightarrow A, Y \nrightarrow Z}{YA \nrightarrow Z}$$

⁹Az ellentmondásosság azt jelenti, hogy két ellentétes függőség (pl. $X \rightarrow W$, $X \nrightarrow W$, lehetnek akár redundánsak is) levezethető az Armstrong-axiómarendszerben. Elegendő megmutatnunk, hogy ilyenkor $\neg(\Box)$ levezethető a PQRST rendszerben. Egyes ellentmondásos esetekben ugyanis az Armstrong-axiómarendszerben levezethető néhány nemredundáns, szingleton függőség, melyek nem vezethetők le a PQRST-ben, az alaphalmaz megszorítottsága miatt (pl. a (6)-os szabállyal levezetjük $X \nrightarrow \emptyset$ -t, és utána bármely B -re a (4)-es szabállyal levezethető $X \nrightarrow B$). Bár ezek az esetek nem relevánsak, szigorú formális értelemben vett teljesség nem állítható.

$$\begin{array}{ll}
 (NT2) \quad \frac{YZW \rightarrow B, Y \nrightarrow ZB}{Y \nrightarrow ZW} & (NT2S) \quad \frac{Y \rightarrow B, Y \nrightarrow ZB}{Y \nrightarrow Z} \\
 (\square) \quad \neg(Y \rightarrow B, Y \nrightarrow B) & (*) \quad \frac{Y \nrightarrow Z}{Y \nrightarrow ZC}
 \end{array}$$

Ezekkel a szabályokkal akkor is működik a levezetés, ha nemsingleton negált függőségeket is figyelembe kell vennünk. Pozitív, funkcionális függőségek levezetésére továbbra is az (S) és a (T) szabály használható, de negáltjukként most az (NS), az (NT1), az (NT2) és a (*) jelenik meg. Bár az (NT2S) levezethető (S)-ből és (NT2)-ből a $W = \emptyset$ választással (ld. az 5.8. lemmát később), az eset gyakran előfordul, így érdemes külön szabályként szerepeltetni.

A gyakorlatban a (*) szabály nem szükséges, mert minden lényeges információt levezethetünk nélküle (ld. az 5.3. tétel 2. részét). Ez azt jelenti, hogy sosem kell bővítenünk egy negált függőség jobb oldalát, ami különösen kedvező, hiszen általában épp az a célunk, hogy ezeket a jobb oldalakat redukáljuk. Így egyedül az (NT2) szabály esete az, ami a jobb oldal méretét növelheti, de ez azzal jár, hogy közben legalább egy attribútumot el is távolítunk belőle ($B \notin W$).

Definiáljuk az *NST axiómarendszert* a $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}^+$ alaphalmazon mint a fenti szabályok együttesét (az (NT2S) opcionális), beleértve a (\square) ellentmondást jelző szimbolikus axiómát is. A rendszer helyes és teljes a nemredundáns függőségekre vonatkozóan, ha a pozitív függőségek kanonikusak. Jelöljük továbbá *NST'*-vel azt az axiómarendszert, melyet *NST*-ből (*) elhagyásával kapunk.

5.3. TÉTEL. Legyen \mathcal{F} a $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}^+$ egy véges részhalmaza, továbbá $\delta \in \mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}^+$.

- (i) Az *NST* rendszer (\square) nélkül helyes a $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}^+$ alaphalmazon és teljes minden ellentmondásmentes \mathcal{F} -re, azaz $\mathcal{F} \vdash_{NST} \delta \iff \mathcal{F} \models \delta$, ha \mathcal{F} ellentmondásmentes. Ezen kívül, $\neg(\square)$ levezethető akkor és csak akkor, ha \mathcal{F} ellentmondásos.
- (ii) A (*) szabály nem szükséges ahhoz, hogy az *NST* rendszerben minden releváns információt levezessünk, azaz az *NST'* rendszer is helyes a $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}^+$ alaphalmazon, teljes \mathbb{D}_c^+ -n; és ha \mathcal{F} ellentmondásmentes, továbbá $\delta \in \mathbb{E}^+$, $\delta = X \nrightarrow Y$, akkor

$$\mathcal{F} \models \delta \implies \exists Z \subseteq Y, Y \neq \emptyset : \mathcal{F} \vdash_{NST'} X \nrightarrow Z.^{10}$$

Ha \mathcal{F} ellentmondásos, akkor $\mathcal{F} \vdash_{NST'} \neg(\square)$.

Az 5.2. tétel bizonyítása az 5.3. tételre és az alábbi lemmákra nyugszik, melyek a *PQRST* és az *NST* $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}_c^+$ alaphalmaz fölötti ekvivalenciáját állítják.

¹⁰Vegyük észre, hogy $X \nrightarrow Z$ legalább annyi információt hordoz, mint δ .

5.1. LEMMA. Ha az NST helyes rendszer, akkor $PQRST$ is helyes, azaz $\vdash_{NST}\{(P),(Q),(R)\}$.

5.2. LEMMA. Vegyünk egy függőségi halmazt, mely nemredundáns, singleton (pozitív és negatív) függőségeket tartalmazhat. Ekkor minden olyan nemredundáns, singleton függőség, mely NST' -ben levezethető $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}^+$ fölött, szintén levezethető a $PQRST$ rendszerben $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}_c^+$ fölött, ha a kezdeti függőségi halmaz ellentmondásmentes. Ha ellentmondásos a halmaz, akkor pedig a $PQRST$ rendszerben $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}_c^+$ fölött levezethető a $\neg(\Box)$. Pontosabban fogalmazva:

- Legyen \mathcal{F} a $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}_c^+$ egy véges részhalmaza, X egy attribútumhalmaz és A egy attribútum, melyre $A \notin X$. Ha \mathcal{F} ellentmondásmentes és $\mathcal{F} \vdash_{NST'} X \nrightarrow A$, akkor $\mathcal{F} \vdash_{PQRST} X \nrightarrow A$. Ha \mathcal{F} ellentmondásos, akkor $\mathcal{F} \vdash_{PQRST} \neg(\Box)$ teljesül.
- Továbbá, ha $\mathcal{F} \vdash_{PQRST} X \nrightarrow A$, akkor a levezetés elvégezhető úgy, hogy az (R) szabályt legfőljebb egyszer kell alkalmazni.

5.3. Az U és az UE axiómarendszerek és kapcsolatuk az ST , az NST és a kiterjesztett Armstrong-axiómarendszerekkel

Tekintsük az alábbi szabályokat. Csakúgy mint előbb, X, Y, Z és W páronként diszjunkt attribútumhalmazokat jelölnek azokra a szabályokra nézve, melyekben együtt előfordulnak (lehetnek üresek is, de a negált függőségek jobb oldala nem válhat üressé), továbbá az A_i -k ($i \in [1..k]$, $k \in \mathbb{N}_0$) különböző attribútumokat jelölnek, melyek nem elemei a velük egy szabályban szereplő halmazoknak.

$$\begin{aligned}
 (U) \quad & \frac{XY \rightarrow A_1, \dots, XY \rightarrow A_k, YA_1 \dots A_k \rightarrow B}{XY \rightarrow B} \\
 (E1) \quad & \frac{XY \rightarrow A_1, \dots, XY \rightarrow A_k, XY \nrightarrow ZA_1 \dots A_l \ (0 \leq l \leq k)}{YA_1 \dots A_k \nrightarrow Z} \\
 (E2) \quad & \frac{X \rightarrow A_1, \dots, X \rightarrow A_k, X \nrightarrow ZA_1 \dots A_k}{X \nrightarrow Z} \\
 (E3) \quad & \frac{XZW \rightarrow A_1, \dots, XZW \rightarrow A_k, XY \nrightarrow ZA_1 \dots A_k}{XY \nrightarrow ZW} \\
 (E\Box) \quad & \neg(X \rightarrow A_1, \dots, X \rightarrow A_k, X \nrightarrow A_1 \dots A_k)
 \end{aligned}$$

Az $\{(U)\}$ egyetlen szabályból álló, \mathbb{D}_c^+ fölött értelmezett rendszer U axiómarendszernek nevezzük. Kibővítvé az (E1), (E2), (E3) szabályokkal és az $(E\Box)$ -vel, megkapjuk az UE axiómarendszert a $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}^+$ alaphalmazon.¹¹

Megjegyzendő, hogy k (és l) lehet 0 is, az (E2) kivételével (ott ez az eset irreleváns). Megmutatható, hogy minden releváns információ levezethető anélkül, hogy (E3)-at $k = 0$ -val alkalmazni kellene (ez az eset felel meg a $(*)$ szabálynak az

¹¹Szoros értelemben ez nem véges axiomatizáció (de rekurzív), hiszen a felírt szabályok valójában sémák, melyekből minden k -ra kapunk egy-egy konkrét szabályt.

NST rendszerben). Ezt az állítást és az UE rendszernek a kiterjesztett Armstrong-axiómarendszerrel a $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}^+$ fölötti ekvivalenciáját mondják ki az alábbi lemmák. \vdash_A jelöli az Armstrong-rendszerbeli bizonyíthatóságot a funkcionális függőségekre (értve ez alatt a (0) axiómát és az (1)-es és (2)-es szabályokat, \mathbb{D} fölött), \vdash_{EA} pedig a kiterjesztett Armstrong-rendszerbeli bizonyíthatóságot ($\mathbb{D} \cup \mathbb{E}$ fölött, az összes szabályt beleértve). E két rendszerrel ismert, hogy helyesek és teljesek.

5.3. LEMMA. (U) helyes, azaz $\vdash_A(U)$.

5.4. LEMMA. Az U szabályrendszer teljes a funkcionális függőségekre nézve a redundáns függőségek kivételével, továbbá azzal a megkötéssel, hogy azokat a függőségeket, melyek jobb oldala több attribútumból áll, kanonikus függőségek reprezentálják. Pontosabban: legyen \mathcal{F} a \mathbb{D} egy véges részhalmaza. Ekkor minden X és Z attribútumhalmazra

$$\mathcal{F} \vdash_A X \rightarrow Z \implies \forall B \in Z \setminus X : \mathcal{F}' \vdash_U X \rightarrow B,$$

ahol

$$\mathcal{F}' = \{V \rightarrow C \mid \exists W : V \rightarrow W \in \mathcal{F}, C \in W \setminus V\}.$$

5.5. LEMMA. Az $(E1)$, $(E2)$, $(E3)$ szabályok és $(E\Box)$ helyesek, azaz $\vdash_{EA}\{(E1), (E2), (E3)\}$ és ha $\mathcal{F} \vdash_{UE} \neg(E\Box)$ egy véges $\mathcal{F} \subset \mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}^+$ halmazra, akkor \mathcal{F} ellentmondásos.

5.6. LEMMA. Az UE rendszer teljes a negált funkcionális függőségekre nézve, a redundáns függőségek kivételével, ha a kiindulási függősség-halmaz ellentmondásmentes. Azokat a pozitív függőségeket, melyek jobb oldala több attribútumból áll, kanonikus függőségek reprezentálják (az 5.4. lemmához hasonlóan), továbbá a nem önellentmondásos redundáns negált függőségeket nemredundánsakkal helyettesítjük. Pontosabban:

- Legyen \mathcal{F} a $\mathbb{D} \cup \mathbb{E}$ egy véges, ellentmondásmentes részhalmaza, és legyenek X és Z olyan attribútumhalmazok, melyekre $Z \setminus X \neq \emptyset$ teljesül. Így ha $\mathcal{F} \vdash_{EA} X \rightarrow Z$, akkor $\mathcal{F}' \vdash_{UE} X \rightarrow Z \setminus X$, ahol

$$\begin{aligned} \mathcal{F}' = & \{V \rightarrow C \mid \exists W : V \rightarrow W \in \mathcal{F}, C \in W \setminus V\} \cup \\ & \{V \rightarrow U \mid \exists W : V \rightarrow W \in \mathcal{F}, U = W \setminus V\}. \end{aligned}$$

- Továbbá, ha $\mathcal{F}' \vdash_{UE} X \rightarrow V$ igaz egy nemredundáns negált függőségre (és \mathcal{F}' nem ellentmondásos), akkor $\exists U \subseteq V, U \neq \emptyset$ úgy, hogy $X \rightarrow U$ levezethető az UE rendszerben anélkül, hogy alkalmaznánk az $(E3)$ szabályt $k = 0$ -val.
- Ha pedig \mathcal{F} ellentmondásos, és a hozzá tartozó \mathcal{F}' -re teljesül $\mathcal{F}' \subset \mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}^+$ (azaz \mathcal{F} nem tartalmaz redundáns negált függőségeket, és így \mathcal{F}' nem tartalmaz $X \rightarrow \emptyset$ alakú függőségeket), akkor $\mathcal{F}' \vdash_{UE} \neg(E\Box)$ igaz, és a levezetés elvégezhető anélkül, hogy $(E3)$ -at $k = 0$ -val alkalmaznánk.

Az ST és az U, valamint az NST és az UE ekvivalenciájáról szólnak az alábbi lemmák:

5.7. LEMMA. Az ST és az U axiómarendszerek ekvivalensek a \mathbb{D}_c^+ fölött, azaz $\vdash_U \{(S), (T)\}$ és $\vdash_{ST}(U)$.

5.8. LEMMA. Az NST és az UE axiómarendszerek ekvivalensek a $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}^+$ fölött, azaz az 5.7. lemma állításain kívül az alábbiak igazak:

- $\vdash_{UE} \{(NS), (NT1), (NT2), (*)\}$,
- $\{(S), (NT2)\} \vdash_{NST} (NT2S), \neg(E\Box) \vdash_{NST} \neg(\Box)$,
- $\vdash_{NST} \{(E1), (E2), (E3)\}, \neg(\Box) \vdash_{UE} \neg(E\Box)$.
- Ezen kívül a $(*)$ szabály csak az $(E3)$ levezetéséhez szükséges $k = 0$ -ra és fordítva (sem a többi szabály levezetéséhez, sem a $(E\Box)$ levezetéséhez (\Box) -ból vagy fordítva).

5.4. A bizonyítások

Az 5.1. tétel első részének bizonyítása az Armstrong-axiómák helyességén és teljességén, továbbá a 5.3., a 5.4. és a 5.7. lemmán nyugszik. A második részhez meg fogjuk mutatni, hogy egy (T)-t követő (S)-alkalmazás felírható mint egy (S)-et követő két (T)-alkalmazás.

A 5.2. tétel első része triviálisan következik a 5.3. tételből és az 5.1. és 5.2. lemmából. A második rész bizonyításához, hasonlóan az 5.1. tételhez, meg fogjuk mutatni, hogy bármely, a szabályokat nem a megadott sorrendben alkalmazott bizonyítás átalakítható egy olyan, vele ekvivalens bizonyítássá, melyben a szabályok követik a sorrendet (és ha a célhalmaz egyelemű, akkor (R)-et legfőbb egyszerűsítő alkalmazni).

Az 5.3. tétel az Armstrong-axiómák helyességén és teljességén nyugszik, valamint az 5.5., az 5.6. és a 5.8. lemmán.

A lemmák bizonyításai közül az 5.2., az 5.4. és az 5.6. érdekesebb, ezekben egy adott, tetszőleges levezetéssel párhuzamosan konstruálható meg a másik axiómarendszerben történő, megfelelő levezetés. Itt ugyanis a formális rendszer szintaxisában van különbség: az (U) rendszer például \mathbb{D}_c^+ fölötti, míg az eredeti Armstrong-axiomatizáció (a (0) axióma az (1) és (2) szabályokkal) \mathbb{D} fölötti.

Először az 5.3.–5.8. lemmákat bizonyítjuk, melyeket az 5.1. és az 5.2. követ. A tételek bizonyításait a lemmák után ismertetjük. A sorrend alapja a lemmák és a tételek logikai egymásra épülése.

Az 5.3. lemma bizonyítása. A $k = 0$ eset éppen az (1) szabálynak felel meg, ha $V = \emptyset$. Ellenkező esetben tetszőleges $k > 0$ -ra tegyük fel, hogy

$$XY \rightarrow A_1, \dots, XY \rightarrow A_k \text{ és } YA_1 \dots A_k \rightarrow B$$

igaz (eleme a függőségi rendszernek). A (0) axióma szerint $XY \rightarrow Y$. A (8) szabály többszöri alkalmazásával $XY \rightarrow YA_1 \cdots A_k$ adódik. Végül a (2) szabály alapján kapjuk a kívánt eredményt: $XY \rightarrow B$. \square

Az 5.4. lemma bizonyítása. Legyen $\mathcal{F} \vdash_A X \rightarrow Z$. Megmutatjuk, hogy

$$\mathcal{F}' \vdash_U \mathcal{G} = \{X \rightarrow B \mid B \in Z \setminus X\}.$$

Ehhez készítünk egy U rendszerbeli levezetést, párhuzamosan $X \rightarrow Z$ levezetésével az Armstrong-rendszerben. Tegyük fel, hogy az $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$ sorozat $X \rightarrow Z$ egy levezetése. Az új levezetést indukcióval készítjük el, biztosítva, hogy minden $f_i = V \rightarrow W$ -re a hozzá tartozó

$$\mathcal{F}'_i = \{V \rightarrow C \mid C \in W \setminus V\}$$

halmaz minden eleme szerepeljen az új levezetésben, még mielőtt f_{i+1} -re kerülne a sor. Ez azt jelenti, hogy minden i -re létezik az új levezetésnek egy $\langle f'_1, \dots, f'_j \rangle$ prefixe, melyre

$$\bigcup_{p=1}^i \mathcal{F}'_p = \bigcup_{q=1}^j \{f'_q\}.$$

Adott i -re a levezetés ezen a tulajdonságát \mathcal{P}_i -vel jelöljük. Vegyük észre, hogy ez a halmaz \mathbb{D}_c^+ része, így ha csak az (U) szabályt alkalmazzuk, a levezetés érvényes lesz az U rendszerben \mathbb{D}_c^+ fölött. Az indukció indításához az új levezetés kezdőprefixe az üres sorozat.

Legyen $0 < i \leq m$ és tegyük fel, hogy a régi levezetés $\langle f_1, \dots, f_i \rangle$ prefixe alapján elkészült az új levezetés \mathcal{P}_i feltételnek megfelelő $\langle f'_1, \dots, f'_j \rangle$ prefixe. Az indukciós lépés az új levezetés prefixének (opcionális) bővítését jelenti. A bővített prefix valamely $h \geq 0$ -ra $\langle f'_1, \dots, f'_j, f'_{j+1}, \dots, f'_{j+h} \rangle$ lesz, melyre

$$\mathcal{F}'_{i+1} \subseteq \bigcup_{q=1}^{j+h} \{f'_q\}$$

és így a \mathcal{P}_{i+1} tulajdonság teljesül. Ha a helyes bővítési lépést megmutatjuk, kész a bizonyítás, mert m -re az állítás indukcióval adódik, és

$$f_m = X \rightarrow Z, \quad \mathcal{F}'_m = \mathcal{G}.$$

A bővítési lépés az eredeti bizonyításban szereplő f_{i+1} feldolgozását jelenti. f_{i+1} négyféle lehet: vagy \mathcal{F} -beli, vagy a (0) axióma szerint került be, vagy pedig az (1), illetve (2) szabályokkal a levezetésben már korábban szerepelt függőség(ek)ből képzett. Tekintsük át a négy esetet.

Tegyük fel, hogy $f_{i+1} \in \mathcal{F}$. Ez esetben \mathcal{F}'_{i+1} elemeit egyszerűen hozzáírjuk az új bizonyításhoz. Mivel $\mathcal{F}'_i \subseteq \mathcal{F}'$, a lépés helyes.

Ha f_{i+1} -et a (0) axióma „példányosításával” kaptuk, akkor $F'_{i+1} = \emptyset$, és emiatt \mathcal{P}_{i+1} automatikusan teljesül az új levezetés bővítése nélkül.

Tegyük fel, hogy $f_{i+1} = X'V'W' \rightarrow Y'V'$ -t az (1)-es szabállyal kaptuk valamely előző $f_{i'} = X' \rightarrow Y'$ alapján. Ez esetben az

$$\mathcal{F}'_{i+1} = \{X'V'W' \rightarrow D \mid D \in Y'V' \setminus X'V'W'\}$$

halmaz elemeivel kell bővíteni az új levezetést (hacsak nem üres). \mathcal{F}'_{i+1} valamely $X'V'W' \rightarrow D$ elemére

$$D \in Y'V' \setminus X'V'W' = Y' \setminus X'V'W' \subseteq Y' \setminus X',$$

és így $X' \rightarrow D \in \mathcal{F}'_{i'}$, ami már korábban be kellett kerüljön az új levezetésbe. Ha az (U) szabályt $k = 0$ -val erre alkalmazzuk, éppen $X'V'W' \rightarrow D$ -t kapunk, amelyet így hozzáveszünk az új levezetéshez. Ezt \mathcal{F}'_{i+1} minden egyes elemére megteesszük, biztosítva \mathcal{P}_{i+1} teljesülését.

A hátralévő eset az, amikor $f_{i+1} = X' \rightarrow Z'$ a (2)-es szabállyal származik valamely korábbi két

$$f_{i_1} = X' \rightarrow Y' \quad \text{és} \quad f_{i_2} = Y' \rightarrow Z'$$

függőségből. Ha $\mathcal{F}'_{i+1} \neq \emptyset$, akkor minden $X' \rightarrow E \in \mathcal{F}'_{i+1}$ függőséget hozzá kell vegyünk az új levezetéshez valamely korábbiak következményeként. Így válik igazzá \mathcal{P}_{i+1} . \mathcal{F}'_{i+1} egy ilyen elemére $E \in Z' \setminus X'$. Ha

$$E \in (Z' \setminus C) \cap Y' \subseteq X' \setminus Y',$$

akkor $X' \rightarrow E \in \mathcal{F}'_{i_1}$, és mivel ezt már f_{i_1} feldolgozásakor hozzáadtuk az új levezetéshez, nem kell tennünk semmit. Különben pedig $E \in Z' \setminus X'Y' \subseteq Z' \setminus Y'$ és $Y' \rightarrow E$ -t f_{i_2} feldolgozásakor hozzáadtuk az új levezetéshez. Legyen

$$X'' = X' \setminus Y', Y'' = Y' \cap X' \quad \text{és} \quad \{A_s \mid 1 \leq s \leq k\} = Y' \setminus X'$$

úgy, hogy $|Y' \setminus X'| = k$ ($k = 0$ is lehetséges, ekkor nincs egy A_s se). Ezekkel a jelölésekkel

$$Y' \rightarrow E = Y''A_1 \cdots A_k \rightarrow E \quad \text{és} \quad \forall s \in [1..k] : X' \rightarrow A_s = X''Y'' \rightarrow A_s \in \mathcal{F}'_{i_1}.$$

Miután \mathcal{F}'_{i_1} elemei benne vannak az új levezetésben, (U) alkalmazható az alábbi módon: X'' felel meg az (U) szabály eredeti jelölésében lévő X -nek, Y'' pedig Y -nak. Így éppen az

$$X''Y'' \rightarrow E = X' \rightarrow E$$

eredményt kapjuk, melyet hozzáadunk az új levezetéshez. A bővítési lépést mind a négy esetre megadtuk, ezzel a lemmát bizonyítottuk. \square

Az 5.5. lemma bizonyítása. $V \rightarrow A_1 \cdots A_k$ levezethető a (8) szabály többszöri alkalmazásával, kiindulva a $V \rightarrow A_1, \dots, V \rightarrow A_k$ függőségekből. Tekintsük ezt első lépésnek minden esetben (a megfelelő V -vel, amely lehet XY , X vagy XZW).

Elsőként (E1) helyességét mutatjuk meg. A $k = 0$ (és így $l = 0$) eset a (0) axiómával és a (3) szabállyal egyszerűen látható. Legyen most $k > 0$, és tegyük fel, hogy

$$XY \rightarrow A_1 \cdots A_k, \text{ and } XY \nrightarrow ZA_1 \cdots A_l$$

igaz (azaz eleme a függőségi rendszernek) valamely $0 \leq l \leq k$ esetén. Az (1) szabállyal $XY \rightarrow YA_1 \cdots A_k$ adódik, majd a (3) szabály szerint $YA_1 \cdots A_k \nrightarrow ZA_1 \cdots A_l$ következik. Végül az (5) szabállyal megkapjuk az $YA_1 \cdots A_k \nrightarrow Z$ negált függőséget.

Az (E2) a (6) szabályból azonnal következik (a $k = 0$ érdektelen).

Az (E3) megmutatásához először tegyük fel, hogy $k > 0$ és $XZW \rightarrow A_1 \cdots A_k$, valamint $XY \nrightarrow ZA_1 \cdots A_k$ igaz ($ZW \neq \emptyset$). Az első függőséget bővítjük az (1) szabállyal, így kapjuk, hogy $XZW \rightarrow ZA_1 \cdots A_k$, melyre alkalmazva a (7) szabályt $XY \rightarrow YZW$ adódik. A kívánt $XY \nrightarrow ZW$ az (5) szabály alapján következik. A $k = 0$ eset megfelel a (4) szabálynak, amely a (7) speciális eseteként ($Z \subseteq Y$) is felfogható.

Mivel – mint éppen láttuk – az UE rendszer szabályai helyesek, minden véges $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}^+$ esetén $\mathcal{F} \vdash_{UE} \neg(\mathbf{E}\Box) \implies \mathcal{F} \vdash_{EA} \neg(\mathbf{E}\Box)$. Ebből már látszik, hogy \mathcal{F} ellentmondásos, de teljesen formálisan is megkaphatjuk: pl. az $X \rightarrow A_1$ és $X \nrightarrow A_1$ a (6) szabály többszöri alkalmazásával érhető el $\neg(\mathbf{E}\Box)$ -ből. \square

Az 5.6. lemma bizonyítása. Legyen $\mathcal{F} \vdash_{EA} X \nrightarrow Z$, $Z \setminus X \neq \emptyset$, és tegyük fel, hogy \mathcal{F} ellentmondásmentes. Vegyük észre, hogy ekkor a hozzá tartozó \mathcal{F}' is ellentmondásmentes, mivel ekvivalens \mathcal{F} -fel a kiterjesztett Armstrong-rendszer szerint. Megmutatjuk, hogy a $\mathcal{H} = \{X \rightarrow U \mid U \subseteq Z \setminus X, U \neq \emptyset\}$ halmaz legalább egy f'' elemére $\mathcal{F}' \vdash_{UE} f''$ teljesül. Ehhez készítünk egy levezetést az UE rendszerben anélkül, hogy alkalmaznánk (E3)-at $k = 0$ -val. Ez igazolja a második állítást. A teljesség ezután egyszerűen következik, ha a levezetést még egy lépéssel bővítjük, nevezetesen (E3)-at $k = 0$ -val alkalmazzuk, s így $\mathcal{F}' \vdash_{UE} X \nrightarrow Z$.

Az 5.4. lemmához hasonlóan \mathcal{H} egy elemét levezetjük az UE rendszerben, párhuzamosan $X \nrightarrow Z$ egy meglévő levezetésével, mely az Armstrong-rendszerben van felírva. Tegyük fel, hogy ez a meglévő levezetés az $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$ sorozat, melyben az egyes f_i -k pozitív vagy negatív funkcionális függőségek lehetnek. Az új levezetést az 5.4. lemma bizonyítása során tárgyalt módszert bővítve készítjük el. A pozitív függőségek levezetése teljes egészében az ott tárgyalt módon történik, s emlékeztetünk, hogy így az eredeti levezetés egy f_{i+1} függőségének feldolgozásakor már az

$$\mathcal{F}'_i = \{V \rightarrow C \mid C \in W \setminus V\}$$

halmaz elemei bekerültek az új levezetésbe, ha $f_i = V \rightarrow W$ alakú volt. Minden negált $f_i = V \nrightarrow W$ függőségre igaz, hogy $W \setminus V \neq \emptyset$ (mivel \mathcal{F} ellentmondásmen-

tes¹²), így az

$$\mathcal{F}_i'' = \{V \rightarrow U \mid U \subseteq W \setminus V, U \neq \emptyset\}$$

halmaz nem üres. Az új levezetést úgy készítjük el, hogy \mathcal{F}_i'' legalább egy eleme szerepeljen benne mire f_{i+1} sorra kerül. Ezen tulajdonság formalizálásához eddigi definícióinkat kiterjesztjük: $\mathcal{F}_i'' = \emptyset$ lesz a pozitív függőségekre és $\mathcal{F}_i' = \emptyset$ a negáltakra. Az invariáns ezáltal így írható fel: minden i -re van az új levezetésnek egy $\langle f'_1, \dots, f'_j \rangle$ prefixe, melyre teljesül, hogy

$$\bigcup_{p=1}^i \mathcal{F}_p' \subseteq \bigcup_{q=1}^j \{f'_q\}, \quad \bigcup_{p=1}^i (\mathcal{F}_p' \cup \mathcal{F}_p'') \supseteq \bigcup_{q=1}^j \{f'_q\}$$

és

$$\forall p \in [1..i]: \mathcal{F}_p'' \neq \emptyset \implies \mathcal{F}_p'' \cap \bigcup_{q=1}^j \{f'_q\} \neq \emptyset.$$

Jelöljük az invariáns tulajdonságot \mathcal{P}_i -vel. Mivel

$$\bigcup_{q=1}^j \{f'_q\} \subset \mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}^+$$

igaz, az új levezetés érvényes lesz az UE rendszerben $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}^+$ felett, ha csak az UE szabályait alkalmazzuk. Kezdetben az új levezetés az üres sorozat.

Legyen $0 < i \leq m$, és indukcióval tegyük fel, hogy az $\langle f'_1, \dots, f'_j \rangle$ sorozat az új levezetés már elkészített része (prefixe), mely a meglévő levezetés $\langle f_1, \dots, f_i \rangle$ prefixe alapján készült és \mathcal{P}_i igaz rá vonatkozóan. Az $f_{i+1} \in \mathbb{D}$ eseteket (\mathcal{F} egy pozitív eleme, illetve a (0) példányosítása vagy az (1), illetve (2) szabállyal kapott függőség) az 5.4. lemma bizonyításakor tárgyaltuk. Ha $f_{i+1} \in \mathbb{E}$, akkor $\mathcal{F}_{i+1}' \neq \emptyset$, és (opcionálisan) bővítjük az új levezetést az $\langle f'_1, \dots, f'_j, f'_{j+1}, \dots, f'_{j+h} \rangle$ sorozattá úgy, hogy

$$\mathcal{F}_{i+1}' \cap \bigcup_{q=1}^{j+h} \{f'_q\} \neq \emptyset.$$

Ez igazolja az állítást, hiszen $f_m = X \rightarrow Z$, $\mathcal{F}_m'' = \mathcal{H}$ és m indukcióval érhető el.

Legyen $f_{i+1} \in \mathcal{F} \cap \mathbb{E}$, $f_i = X' \rightarrow Z'$. Ez esetben $X' \rightarrow Z' \setminus X' \in \mathcal{F}_i''$, és ezzel a negált függőséggel bővítjük az új levezetést, hogy \mathcal{P}_{i+1} teljesüljön.

A második esetben tegyük fel, hogy

$$f_{i+1} = Y' \rightarrow Z' \ (Z' \setminus Y' \neq \emptyset)$$

a (3) szabállyal valamely előző

$$f_{i_1} = X' \rightarrow Y' \quad \text{és} \quad f_{i_2} = X' \rightarrow Z' \ (Z' \setminus X' \neq \emptyset)$$

¹²Egy önellentmondásos negált függőség ($XY \rightarrow X$) a kiterjesztett Armstrong-rendszerrel akkor és csak akkor vezethető le, ha a kezdeti függőségi halmaz ellentmondásos. A „csak akkor” irány triviális. A másik irány a (3) szabály $Y = Z$ esetéből, a (6) szabály $Y = \emptyset$ esetéből, illetve a (7) szabály $X = Y$ esetéből egyaránt következik.

függőségek alapján következik. Ekkor az új levezetést valamely $Y' \nrightarrow V'$ függőséggel kell bővítenünk egy nem üres $V' \subseteq Z' \setminus Y'$ halmazzal. Vegyünk egy

$$X' \nrightarrow U' \in F''_{i_2} \quad (U' \subseteq Z' \setminus X')$$

olyan függőséget, amely már előfordul az új levezetés eddig elkészített prefixében. Legyen

$$\begin{aligned} X'' &= X' \setminus Y', & Y'' &= X' \cap Y', \\ Z'' &= U' \setminus Y' \subseteq Z' \setminus Y', & \{A_1, \dots, A_k\} &= Y' \setminus X', \\ |Y' \setminus X'| &= k \end{aligned}$$

($k = 0$ is megengedett, ekkor nincsenek A_s -k), és tegyük fel, hogy A_1, \dots, A_l éppen $U' \cap Y'$ elemei, mely a $Y' \setminus X'$ részhalmaza. Így

$$Z'' A_1 \dots A_l = U' \quad \text{és} \quad X'' Y'' \nrightarrow Z'' A_1 \dots A_l = X' \nrightarrow U'.$$

Minden $s \in [1..k]$ -ra

$$X' \rightarrow A_s = X'' Y'' \rightarrow A_s \in \mathcal{F}'_{i_1},$$

és emiatt már akkor bekerültek az új levezetésbe, amikor f_{i_1} -et dolgoztuk fel. Az (E1) szabály alkalmazásával, X'' -et írva X helyére, Y'' -t írva Y helyére és Z'' -t írva Z helyére,

$$Y'' A_1 \dots A_k \nrightarrow Z'' = Y' \nrightarrow Z''$$

adódik, ha $Z'' \neq \emptyset$. Az új levezetést bővítjük ezzel a negált függőséggel, és $Z'' \subseteq Z' \setminus Y'$ biztosítja, hogy a kívánt \mathcal{P}_{i+1} tulajdonság igaz legyen. Megmutatjuk, hogy Z'' nem lehet üres. Indirekt módon tegyük fel, hogy az. Ekkor

$$X' \nrightarrow U' = X' \nrightarrow A_1 \dots A_l.$$

Mivel korábban minden $X' \rightarrow A_s$ le lett vezetve az UE rendszerben, $\neg(\text{E}\Box)$ -t kapjuk, ami azt jelenti, hogy F' ellentmondásos (ld. 5.5. lemma, az UE-axiómarendszer helyes). Ez viszont ellentmond a feltételnek, miszerint F' ellentmondásmentes, ezért $Z'' \neq \emptyset$.

Ha

$$f_{i+1} = X' \nrightarrow Y' Z' \quad (Y' Z' \setminus X' \neq \emptyset)$$

a (4) szabállyal következett egy előző $f_{i'} = X' \nrightarrow Y'$ alapján, akkor az indukció miatt egy

$$X' \nrightarrow U' \in F''_{i'} \quad (U' \subseteq Y' \setminus X', U' \neq \emptyset)$$

függőségnek már szerepelnie kell az új levezetésben. Mivel $U' \subseteq Y' \setminus X' \subseteq Y' Z' \setminus X'$, $F''_{i'} \subseteq F''_{i+1}$, és így a \mathcal{P}_{i+1} tulajdonság a levezetés bővítése nélkül igaz lesz.

A következő esetben tegyük fel, hogy az

$$f_{i+1} = X' Z' \nrightarrow Y' \quad (Y' \setminus X' Z' \neq \emptyset)$$

függőség az eredeti levezetésbe az (5) szabály alapján a korábbi $f_{i'} = X'Y' \rightarrow Y'Z'$ közvetlen következményeként került be. Az indukció miatt az új levezetésben már szerepelnie kell egy

$$X'Z' \rightarrow U' \in F_{i'}'' (U' \subseteq Y'Z' \setminus X'Z', U' \neq \emptyset)$$

függőségnek és így újfent nincs szükség bővítésre a \mathcal{P}_{i+1} tulajdonság teljesüléséhez, ugyanis $Y'Z' \setminus X'Z' = Y' \setminus X'Z'$, és így $F_{i'}'' = F_{i+1}''$.

Most tegyük fel, hogy

$$f_{i+1} = X' \rightarrow Y' (Y' \setminus X' \neq \emptyset),$$

és ez a (6) szabály $f_{i_1} = X' \rightarrow Z'$ -re és $f_{i_2} = X' \rightarrow Y'Z'$ -re történt alkalmazásával került az eredeti levezetésbe. \mathcal{P}_{i+1} teljesüléséhez egy

$$X' \rightarrow V' \in F_{i+1}'' (V' \subseteq Y' \setminus X', V' \neq \emptyset)$$

függőséget kell az új levezetésbe beillesztenünk. Az indukciós feltevés miatt $X' \rightarrow U' \in F_{i_2}''$ már szerepel az új levezetésben egy nem üres $U' \subseteq Y'Z' \setminus X'$ halmazzal, és nem kell tennünk semmit, ha $U' \subseteq Y' \setminus X'$. Legyen

$$\{A_1, \dots, A_k\} = (Z' \setminus X') \cap U'$$

különböző A_s -ekkel ($k = 0$ megengedett), és $Z'' = U' \setminus Z'$. Így

$$X' \rightarrow U' = X' \rightarrow Z''A_1 \dots A_k.$$

Mivel minden $X' \rightarrow A_s \in F_{i_1}'$, ezek már le vannak vezetve az új bizonyításban. Az, hogy $Z'' \neq \emptyset$, a (3) szabály eseténél tárgyalt módon bizonyítható itt is. Emiatt az (E2) szabály alkalmazható Z'' helyettesítésével Z -be, és az eredmény,

$$X' \rightarrow Z'' = X' \rightarrow U' \setminus Z' (U' \setminus Z' \subseteq Y' \setminus X')$$

hozzáírható az új levezetéshez, teljesítve \mathcal{P}_{i+1} -t.

Az utolsó eset az, amikor az $f_{i+1} = X' \rightarrow Y' (Y' \setminus X' \neq \emptyset)$ a (7) szabállyal valamely korábban levezetett $f_{i_1} = Y' \rightarrow Z'$ és $f_{i_2} = X' \rightarrow Z' (Z' \setminus X' \neq \emptyset)$ alapján következett. Ekkor, hogy \mathcal{P}_{i+1} igaz legyen, biztosítanunk kell, hogy valamely

$$X' \rightarrow V' \in \mathcal{F}_{i+1}'' (V' \subseteq Y' \setminus X', V' \neq \emptyset)$$

bekerüljön az új levezetésbe. Az indukció miatt egy

$$X' \rightarrow U' \in F_{i_2}'' (U' \subseteq Z' \setminus X', U' \neq \emptyset)$$

már bekerült az új levezetésbe. Ha $U' \setminus Y' = \emptyset$, akkor $U' \subseteq Y' \setminus X'$, és P_{i_2} -ből következik P_{i+1} . Ellenkező esetben legyen

$$\{A_1, \dots, A_k\} = U' \setminus Y', \quad |U' \setminus Y'| = k \quad (k > 0),$$

és

$$\begin{aligned} Z'' &= U' \cap Y', & Y'' &= X' \cap Y', \\ X'' &= X' \setminus Y', & W'' &= Y' \setminus X'U'. \end{aligned}$$

Ezekkel a jelölésekkel $U' = Z''A_1 \cdots A_k$, $X' = X'' \setminus Y''$ és $Y' = Y''Z''W''$. Minden $s \in [1..k]$ -ra

$$Y' \rightarrow A_s = Y''Z''W'' \rightarrow A_s \in F'_{i_1},$$

és ezek mindegyike bekerült az új levezetésbe f_{i_1} feldolgozásakor. Alkalmazzuk az (E3) szabályt $k > 0$ -ra, X'' -et X helyére, Y'' -t Y helyére, Z'' -t Z helyére és W'' -t W helyére írva az imént említett függőségekre az

$$X' \rightarrow U' = X''Y'' \rightarrow Z''A_1 \cdots A_k$$

függőséggel együtt, melynek eredménye $X''Y'' \rightarrow Z''W''$ lesz. Vegyük észre, hogy $Y'' \cap Z'' = X' \cap Y' \cap U'$ és ez üres, mivel $U' \subseteq Z' \setminus X'$. Emiatt

$$U' \cap Y' \subseteq Y' \setminus X',$$

és

$$Z''W'' = (U' \cap Y') \cup (Y' \setminus X'U') = Y' \setminus X' \neq \emptyset.$$

Így az (E3) szabállyal levezetett függőséget az új levezetéshez hozzáírva \mathcal{P}_{i+1} teljesülni fog.

Ezzel az összes lehetséges esetet kimerítettük, így az új levezetés konstrukciója a régi minden egyes f_{i+1} lépése alapján elvégezhető; és ha az eredeti levezetés a kiterjesztett Armstrong-rendszerben $X \rightarrow Z$ -t bizonyította, akkor az új az UE rendszerben \mathcal{H} egyik elemét eredményezi. Ez a lemma első állítását igazolja. Vegyük észre, hogy az (E3) szabályt nem alkalmaztuk $k = 0$ -val egyik esetben sem, így a lemma második állítását is igazoltuk.

Tekintsük a harmadik, utolsó állítást, amikor is \mathcal{F} ellentmondásos, de nem tartalmaz redundáns negált függőségeket. Tegyük fel, hogy valamely X és Y attribútumhalmazra $\mathcal{F} \vdash_{EA} X \rightarrow Y$ és $\mathcal{F} \vdash_{EA} X \rightarrow Y$ is igaz.

Legyen $\{C_1, \dots, C_k\} = Y \setminus X$. Mivel a (3)-(7) szabályokkal nem vezethető le pozitív függőség, $\mathcal{F} \vdash_A X \rightarrow Y$ kell teljesülnön, és így $\mathcal{F}' \vdash_U \{X \rightarrow C_i\}$ minden $i \in [1..k]$ -ra az 5.4. lemma szerint. Megmutatjuk, hogy vagy $\mathcal{F}' \vdash_{UE} X \rightarrow C_1 \cdots C_l$ igaz valamely $l \in [1..k]$ -ra, vagy $\neg(E\Box)$ (esetleg már attribútumokkal) levezethető. Kezdjük el $X \rightarrow C_1 \cdots C_k$ levezetését az UE rendszerben, párhuzamosan $X \rightarrow Y$ bizonyításával csakúgy, mint az ellentmondásmentes esetben. Ha megnézzük a módszert, mindaddig működik, amíg az eredeti levezetésben egy $X'Y' \rightarrow X'$ alakú önellentmondásos függőséghez érkezünk. Ha most egy pillanatra feltesszük, hogy az UE rendszerben a negált függőségek jobb oldala lehet üres, az új levezetést tovább építhetnénk, mely azt eredményezné, hogy $X'Y' \rightarrow \emptyset$ -zal kell bővítenünk az (E1), (E2) vagy (E3) szabály alkalmazásának következtében. Ahelyett, hogy elvégeznénk ezt a bővítést, könnyen észrevehetjük, hogy ennek a lépésnek az előfeltétele (az (E1) és (E2) esetén $Z = \emptyset$, (E3)-ra pedig $ZW = \emptyset$) éppen $\neg(E\Box)$ valamely A_1, \dots, A_k attribútumokkal. Így arra a következtetésre jutunk, hogy még mielőtt elakadna az új levezetés elkészítése, $\neg(E\Box)$ már le kellett vezetve legyen. Ha nem akad el, akkor pedig $X \rightarrow C_1 \cdots C_k$ levezethető valamely $l \in [1..k]$ -ra, ami megint csak $\neg(E\Box)$ -nak felel meg. Vegyük észre, hogy ismét nem alkalmaztuk (E3)-at $k = 0$ -ra ahhoz, hogy megkapjuk $\neg(E\Box)$ -t. \square

Az 5.7. lemma bizonyítása. Az (S) és (T) szabályok az (U) speciális esetei: $k = 0$, $|X| = 1$ illetve $k = 1$, $|X| = 0$.

Legyen $k > 0$ és $|X| > 0$. Megmutatjuk, hogy minden $0 \leq t \leq k$ -ra,

$$\{XY \rightarrow A_1, \dots, XY \rightarrow A_k, YA_1 \cdots A_k \rightarrow B\} \vdash_{ST} XYA_1 \cdots A_t \rightarrow B$$

igaz. Az igazolandó állítás éppen a $t = 0$ eset, $t = k$ -ra pedig az (S) alkalmazásával egyszerűen következik. Tegyük fel t -re vonatkozó indukcióval, hogy

$$XYA_1 \cdots A_{t+1} \rightarrow B$$

levezethető. Ekkor $XY \rightarrow A_{t+1}$ -ből az (S) szabállyal $XYA_1 \cdots A_t \rightarrow A_{t+1}$ adódik, és ebből (T)-vel azonnal következik

$$XYA_1 \cdots A_t \rightarrow B.$$

A $t = 0$ esetet indukcióval kapjuk. □

Az 5.8. lemma bizonyítása. Az $\{(U)\}$ és az $\{(S), (T)\}$ ekvivalenciáját az 5.7. lemma állította és az imént bizonyítottuk. Maradnak tehát a negált függőségekre vonatkozó szabályok. Az (NS) és az (NT1) az (E1) speciális esetei, $|X| = 1$, $k = 0$ ($l = 0$), ill. $|X| = 0$, $k = 1$, $l = 0$ választással. Hasonlóan, (NT2) és (*) az (E3) speciális esetei rendre $k = 1$ és $k = 0$ választással.

(NT2S) egyszerűen szimulálható az $Y \rightarrow B$ függőség (S)-sel $YZ \rightarrow B$ -re történő bővítésével, majd az (NT2) alkalmazásával $W = \emptyset$ esetén $Y \nrightarrow Z$ -t kapunk.

$\neg(E\Box)$ -ből indulva $\neg(\Box)$ levezethető (NT2S) ismételt alkalmazásával. A fordított eset triviális, mivel (\Box) az $(E\Box)$ speciális esete ($k = 1$).

Tekintsük az (E1) $k = 0$, $l = 0$, $|X| > 1$ esetét. Ezt könnyen szimulálhatjuk (NS) ismételt alkalmazásával. Legyen $k > 0$. Ha $l > 0$, akkor (NT2S)-sel az A_i -ket ($1 \leq i \leq l$) a $XY \nrightarrow ZA_1 \cdots A_l$ jobb oldaláról lépésenként elvehetjük (az $XY \rightarrow A_i$ függőség igaz minden i -re). (E1) még nem tárgyalt esete a $k > 0$, $l = 0$. (NT1) alkalmazásával $XYA_1 \nrightarrow Z$ kapható. Minden $XY \rightarrow A_j$ ($1 < j \leq k$) függőséget $XYA_1 \cdots A_{j-1} \rightarrow A_j$ -re bővítünk (S)-sel, hogy (NT1) ismételten alkalmazható legyen. Így minden j -re megkapjuk $XYA_1 \cdots A_j \nrightarrow Z$ -t. Amint $j = k$ lesz, (NS)-sel elvesszük X -et a bal oldalról és megkapjuk a kívánt $YA_1 \cdots A_k \nrightarrow Z$ függőséget.

Az (E2) szabály csak $k > 0$ -ra releváns és $X \nrightarrow ZA_1 \cdots A_j$ levezethető (NT2S)-sel lépésenként minden $j \in [0..k]$ -ra. $j = 0$ -ra éppen a kívánt $X \nrightarrow Z$ függőséget kapjuk.

Tekintsük (E3)-at $k > 0$ -ra. Ehhez

$$XZW \rightarrow A_k\text{-t}$$

bővítjük (S)-sel

$$XZA_1 \cdots A_{k-1}W \rightarrow A_k\text{-ra.}$$

Ezután (N2)-vel $XY \rightarrow Z A_1 \cdots A_{k-1} W$ adódik ($Z A_1 \cdots A_{k-1}$ helyettesítendő Z helyére az eredeti képletben). Az $A_1 \cdots A_{k-1}$ attribútumok eliminálhatók a jobb oldalról (NT2S) ismételt alkalmazásával, így $XY \rightarrow ZW$ adódik.

Az utolsó eset (E3) $k = 0$ -val, ami $(*)$ (esetleges ismételt) alkalmazásának felel meg. Ezzel beláttuk az ekvivalenciát. Vegyük észre, hogy a $(*)$ szabályt nem alkalmaztuk más esetben. Ez igazolja a lemma utolsó állítását is, azzal együtt, hogy az NST minden szabálya (beleértve a (\square) axiómát is) az UE valamely szabályának (vagy $(E\square)$ -nak) speciális esete és $(*)$ az egyetlen, amely megfelel (E3)-nak $k = 0$ -ra. \square

Az 5.1. lemma bizonyítása. Triviális: A (P) és a (Q) rendre az (NS) és az $(NT1)$ speciális esetei ($|Z| = 1, B = Z$); (R) pedig az $(NT2)$ speciális esete ($Z = \emptyset, |W| = 1, A = W$). \square

Az 5.2. lemma bizonyítása. Először tegyük fel, hogy \mathcal{F} ellentmondásmentes (az 5.6. és 5.8. lemmák értelmében ez azt jelenti, hogy $\mathcal{F} \not\vdash_{NST'} \neg(\square)$), és hogy $\mathcal{F} \vdash_{NST'} X \rightarrow A$ igaz. Tekintsük $X \rightarrow A$ egy levezetését. A szabályok alakjából látható, hogy a levezetés lépései átrendezhetők oly módon, hogy minden pozitív függőség megelőzze a negatív függőségeket. Ha kihagyjuk a levezetés azon elemeit, amelyek nem szükségesek $X \rightarrow A$ bizonyításához, láthatjuk, hogy csak az első negált függőség kell hogy \mathcal{F} -beli legyen, hiszen nincs olyan szabály, melynek az előfeltétele két vagy több negált függőséget tartalmazna. Továbbá, az így megmaradt negált függőségek sorrendje olyan, hogy mindegyik az előzőből lett egy lépésben levezetve valamely szabály alkalmazásával (és esetleg egy pozitív függőség figyelembe vételével). Jelölje $\langle \delta_1, \dots, \delta_s, \varepsilon_t, \dots, \varepsilon_1 \rangle$ ezt az NST' rendszerben felírt, szűkített és átrendezett levezetést ($\delta_i \in \mathbb{D}_c^+, \varepsilon_j \in \mathbb{E}_c^+$ minden $i \in [1..s]$ -re és $j \in [1..t]$ -re). Vegyük észre, hogy $\varepsilon_1 = X \rightarrow A$, és mivel $\varepsilon_t \in \mathcal{F}$, továbbá ez az egyetlen ε_i ezzel a tulajdonsággal, $(\mathcal{F} \cap \mathbb{D}_c^+) \cup \{\varepsilon_t\} \vdash_{NST'} X \rightarrow A$ igaz. Készítünk egy ekvivalens levezetést a PQIRST rendszerben az eredetivel párhuzamosan. A pozitív függőségeket $\langle \langle \delta_1, \dots, \delta_s \rangle \rangle$ változatlanul átírjuk az új bizonyítás elejére, mivel az (S) és a (T) szabályok közősek az NST' és a PQIRST szabályrendszerben. A negatív függőségeket $\langle \langle \varepsilon_t, \dots, \varepsilon_1 \rangle \rangle$ egyenként tekintve lecseréljük egy $\langle \delta_{s+1}, \dots, \delta_r, \zeta_u, \dots, \zeta_1 \rangle$ sorozatra ($r \geq s, u \in \mathbb{N}^+; \delta_i \in \mathbb{D}_c^+, \zeta_j \in \mathbb{E}_c^+$ minden $i \in [s+1..r]$ -re és $j \in [1..u]$ -ra), mely érvényes levezetés lesz a PQIRST rendszerben $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}_c^+$ fölött. A konstrukció során biztosítjuk, hogy minden $i \in [1..t]$ -re az új levezetésnek legyen egy $\langle \delta_1, \dots, \delta_{h_i} \rangle$ prefixe és egy $\langle \zeta_{j_i}, \dots, \zeta_1 \rangle$ szuffixe ($h_i \geq h_{i-1} \geq s$ és $j_i \geq j_{i-1}$ minden $i \in [2..t]$ -re) úgy, hogy $\langle \delta_1, \dots, \delta_{h_i}, \zeta_{j_i}, \dots, \zeta_1 \rangle$ egy érvényes levezetés, mely igazolja az

$$(\mathcal{F} \cap \mathbb{D}_c^+) \cup \{\varepsilon_i\} \vdash_{PQIRST} X \rightarrow A$$

állítás. Továbbá biztosítjuk, hogy $\zeta_{j_i} = V \rightarrow A$ minden $\varepsilon_i = V \rightarrow W$ -re, és $V A \rightarrow E \in \{\delta_1, \dots, \delta_{h_i}\}$ minden $E \in W \setminus A$ -ra. E két tulajdonságot jelölje \mathcal{Q}_i adott $i \in [1..t]$ -re. Első lépésként \mathcal{Q}_1 a $\zeta_1 = \varepsilon_1$ választással, $h_1 = s$ és $j_1 = 1$ mellett igaz. t pedig indukcióval érhető el, az alább részletezett módon eljárva

minden lépésben. Ha $\zeta_{j_t} = \varepsilon_t$, akkor $u = j_t$, és a bizonyítás kész. Máskülönben

$$\zeta_{j_t} = Y \rightarrow A, \quad \varepsilon_t = Y \rightarrow E (A \neq E),$$

és ekkor Ω_t szerint $YA \rightarrow E$ szerepel az új levezetés prefixében. Ekkor $\zeta_{j_t+1} = \varepsilon_t$ -t kell az elkészített szuffix elejére illeszteni (legyen $u = j_t + 1$), mivel ζ_{j_t} levezethető az (R) szabállyal az $YA \rightarrow E$ és az ε_t függőségekből kiindulva. Ez az (R) egyetlen szükséges alkalmazása, mint azt az alábbiakban látni fogjuk.

Indukcióval tegyük fel, hogy a PQIRST-beli új levezetés egy $\langle \delta_1, \dots, \delta_{h_i} \rangle$ prefixe és egy $\langle \zeta_{j_i}, \dots, \zeta_1 \rangle$ szuffixe már elkészült az eredeti levezetés pozitív függőségeinek és $\langle \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_1 \rangle$ szuffixének feldolgozásával ($i \in [1..t-1]$) úgy, hogy teljesíti Ω_i -t. Az indukciós lépésben végzünk egy (opcionális) bővítést a prefixen, a szuffixon (vagy mindkettőn), hogy Ω_{i+1} -et is teljesítse. Többféle eset lehetséges aszerint, hogy mely szabály alkalmazásával kaptuk ε_i -t ε_{i+1} -ből az eredeti levezetésben ($\varepsilon_i \notin \mathcal{F}$ mint láttuk).

Tegyük fel, hogy $\varepsilon_i = Y \rightarrow Z$ és $\varepsilon_{i+1} = YC \rightarrow Z$ (az (NS) szabályt alkalmazta az eredeti levezetés), és $\zeta_{j_i} = Y \rightarrow A$. Legyen

$$j_{i+1} = j_i + 1, \quad \zeta_{j_{i+1}} = YC \rightarrow A$$

(ez érvényes lépés, hiszen ζ_{j_i} levezethető (P) alkalmazásával $\zeta_{j_{i+1}}$ -re). Hogy Ω_{i+1} teljesüljön, bővítjük az új levezetés prefixét minden olyan

$$YCA \rightarrow E (E \in Z \setminus A)$$

függőséggel, amely még nem szerepel benne. Ezek az indukció alapján már a bizonyításban szereplő $YA \rightarrow E$ -ből (S) alkalmazásával állíthatók elő. Vegyük észre, hogy $A \neq C$ mivel \mathcal{F} ellentmondásmentes ($A = C$ azt jelentené, hogy $YC \rightarrow E$ igaz minden $E \in Z \setminus C = Z$ -re, és ez ellentmond $YC \rightarrow Z$ -vel).

A második eset az, amikor az (NT1) szabályt alkalmazta az eredeti levezetés $\varepsilon_{i+1} = Y \rightarrow Z$ -re, és valamely $\delta_k = Y \rightarrow A' (k \leq s)$, hogy megkapja

$$\varepsilon_i = YA' \rightarrow Z.$$

Az indukciós feltevés miatt

$$\zeta_{j_i} = YA' \rightarrow A \quad \text{és} \quad \forall E \in Z \setminus A \exists l \in [1..h_i] : \delta_l = YA'A \rightarrow E.$$

A szuffixet bővíthetjük $\zeta_{j_{i+1}} = \zeta_{j_i+1} = Y \rightarrow A$ -val, mivel ζ_{j_i} a (Q) szabállyal egy lépésben megkapható δ_k -ből és ebből a $\zeta_{j_{i+1}}$ -ből. Továbbá $YA \rightarrow E$ levezethető minden $E \in Z \setminus A$ -ra (S)-sel és (T)-vel, kiindulva $Y \rightarrow A'$ -ből és $YA'A \rightarrow E$ -ből, melyek már szerepelnek az új levezetésben. A prefixet bővítjük az $YA \rightarrow A'$ és az $YA \rightarrow E$ függőségekkel, ha azok még nem szerepelnek benne, így megkapjuk Ω_{i+1} -et.

A harmadik és egyben utolsó eset az (NT2) szabályé. Legyen $\varepsilon_i = Y \rightarrow ZW$, $\varepsilon_{i+1} = Y \rightarrow ZB$, és k olyan, hogy $\delta_k = YZW \rightarrow B (k \leq s)$. Az indukció miatt

$$\zeta_{j_i} = Y \rightarrow A, \quad \text{és} \quad \forall E \in ZW \setminus A \exists l \in [1..h_i] : \delta_l = YA \rightarrow E.$$

Legyen $j_{i+1} = j_i$ (a szuffixot nem bővítjük). Q_{i+1} teljesüléséhez még $YA \rightarrow E$ -t kell hozzávenni a prefixhez, ha az nem szerepel még benne, minden $E \in ZB \setminus A$ -ra. Mivel minden $E \in Z \setminus A$ -ra már szerepel benne, csak az $YA \rightarrow B$ -vel kell bővíteni, ha egyáltalán kell (ez esetben, $A \neq B$). Az (U) szabállyal az $YA \rightarrow B$ megkapható a fent említett δ_k és δ_l függőségekből. Az 5.7. lemma szerint az (U) kifejezhető az (S) és a (T) szabályokkal és ennek a bizonyításnak a lépéseivel kell bővítenünk az új levezetést.

Egy ellentmondásmentes függőségi halmazra a PQIRST-beli új levezetés elkészíthető a fenti lépésekkel. Ha viszont a kezdeti \mathcal{F} halmaz ellentmondásos, akkor $\neg(\square)$ levezethető az NST' rendszerben. Egy ilyen levezetés átalakítása elakadhat, ha tartalmaz egy olyan $\varepsilon_k = Y \rightarrow Z$ függőséget, amelyre $k > 1$ és $\mathcal{F} \vdash_{ST} Y \rightarrow E$ minden $E \in Z$ -re (ld. az (NS) szabály esetét). Az első ilyen tulajdonságú ε_k -t kiválasztva (a lehető legnagyobb k indexszel) és az eredeti levezetést itt elvágva (csak az ez előtti függőségig tekintve) befejezhető az átalakítás. Először tetszőlegesen kiválasztunk egy $D \in Z$ attribútumot $\zeta_1 = Y \rightarrow D$ -hez és $Y \rightarrow E$ levezetésének lépéseit minden $E \in Z$ -re hozzáadjuk a $\langle \delta_1, \dots, \delta_s \rangle$ prefixhez, majd tovább folytatjuk az átalakítás lépéseit a tárgyalta módon. Az eljárás nem akad el, és mind $Y \rightarrow D$, mind pedig $Y \rightarrow Z$ szerepelni fog a levezetésben, jelezve, hogy \mathcal{F} ellentmondásos. \square

Az 5.1. tétel (i) állításának bizonyítása. Az ST rendszer helyessége és teljessége az Armstrong-rendszer helyességéből és teljességéből, valamint az 5.3., 5.4. és 5.7. lemmákból következik. Vegyük észre, hogy az 5.4. lemmában, ha $\mathcal{F} \in \mathbb{D}_c^+$ és $X \rightarrow Z \in \mathbb{D}_c^+$, akkor $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$, és pontosan egy $B \in Z \setminus X$ attribútum és egy $X \rightarrow Z = X \rightarrow B$ függőség van. Így egyszerűen azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{F} \vdash_{ST} \delta \iff \mathcal{F} \vdash_U \delta \iff \mathcal{F} \vdash_A \delta \iff \mathcal{F} \models \delta.$$

Az 5.1. tétel (ii) állításának bizonyítása. Megmutatjuk, hogy (S) (T) utáni alkalmazása szimulálható (S) kétszeri, majd (T) kétszeri alkalmazásával. Tegyük fel, hogy a kiindulási függőségek $YA \rightarrow B$ és $Y \rightarrow A$. (T), majd (S) alkalmazásával $Y \rightarrow B$ és $YC \rightarrow B$ adódik. E helyett (S)-et alkalmazva mindkét kezdeti függőségre $YCA \rightarrow B$ -t és $YC \rightarrow A$ -t kapunk. Erre a két függőségre alkalmazva (T)-t, megkapjuk $YC \rightarrow B$ -t, és $Y \rightarrow B$ levezethető (T)-vel ezt követően a két kiindulási függőségből. \square

Az 5.3. tétel (i) állításának bizonyítása. Az NST rendszer helyessége és teljessége (a (\square) nélkül) a kiterjesztett Armstrong-axiómarendszer helyességéből és teljességéből, valamint az 5.5., az 5.6. és az 5.8. lemmából következik. Vegyük észre, hogy az 5.6. lemmában, ha

$$\mathcal{F} \subset \mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}^+ \quad \text{és} \quad X \rightarrow Z \in \mathbb{E}^+,$$

akkor

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}' \quad \text{és} \quad X \rightarrow Z = X \rightarrow Z \setminus X \quad (Z \setminus X \neq \emptyset).$$

Az 5.1. tétel (i) állításának bizonyításához hasonlóan kapjuk, hogy

$$\mathcal{F} \vdash_{NST} \delta \iff \mathcal{F} \vdash_{UE} \delta \iff \mathcal{F} \vdash_{EA} \delta \iff \mathcal{F} \models \delta$$

minden ellentmondásmentes \mathcal{F} -re. A helyesség érvényes függetlenül attól, hogy \mathcal{F} ellentmondásmentes-e, így $\mathcal{F} \vdash_{UE} (\Box) \implies \mathcal{F} \vdash_{EA} (\Box)$. A fordított irány ellentmondásos esetben az 5.6. lemmából következik, mivel $F = F' \subset \mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}^+$.

Az 5.3. tétel (ii) állításának bizonyítása. A helyesség $\mathbb{D}_c^+ \cup \mathbb{E}^+$ fölött és a teljesség \mathbb{D}_c^+ fölött e tétel (i) állításának triviális következménye. Az (i) állításhoz hasonlóan $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$. Az 5.6. és az 5.8. lemma alapján (azok utolsó állításaira hivatkozva) az alábbiakat kapjuk, ha \mathcal{F} ellentmondásmentes:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \Vdash X \nrightarrow Y \in \mathbb{E}^+ &\implies F \vdash_{UE} X \nrightarrow Y \implies \\ &\implies [\exists Z \subseteq Y, Z \neq \emptyset : \mathcal{F} \vdash_{UE} X \nrightarrow Z \text{ (E3) nélkül } k = 0\text{-ra}] \implies \\ &\implies [\mathcal{F} \vdash_{NST} X \nrightarrow Z \text{ ugyanarra a } Z\text{-re } (*) \text{ nélkül}]. \end{aligned}$$

Ellentmondásos \mathcal{F} -re pedig azt kapjuk, hogy

$$[\mathcal{F} \vdash_{UE} \neg(\Box) \text{ (E3) nélkül } k = 0\text{-ra}] \implies [\mathcal{F} \vdash_{NST} \neg(\Box)(*) \text{ nélkül}]. \quad \square$$

Az 5.2. tétel (i) állításának bizonyítása. Az állítás az 5.3. tételből és az 5.1., 5.2. lemmákból triviálisan következik.

Az 5.2. tétel (ii) állításának bizonyítása. Az (i) állítás szerint minden pozitív következmény levezethető úgy, hogy először (S)-et alkalmazzuk amíg lehet, majd utána (T)-t amíg lehet. Világos, hogy a (P), (Q) és (R) szabályok alkalmazása maradhat ezek utánra. Azt kell belátnunk, hogy az (R) szabály (P) vagy (Q) utáni alkalmazása helyettesíthető egy olyan levezetéssel, amelyben (R) megelőzi (P) és (Q) alkalmazásának összes előfordulását.

Először tegyük fel, hogy (R)-et közvetlenül (Q) után alkalmaztuk. Az $Y \rightarrow A$, $Y \nrightarrow B$ és $YAC \rightarrow B$ függőségekből indulva (Q)-val $YA \nrightarrow B$ -t kapunk, majd ezt követően (R) alapján $YA \nrightarrow C$ -t. $YA \nrightarrow C$ egy alternatív levezetéséhez vegyük észre, hogy $YC \rightarrow B$ -t már le kellett vezetnünk, mivel az egy pozitív függőség, mely (T)-vel következik. Az (R) szabályt alkalmazva először $YC \rightarrow B$ -re és $Y \nrightarrow B$ -re, $Y \nrightarrow C$ -t kapunk, és a kívánt $YA \nrightarrow C$ függőség a (Q) szabály alapján következik. Ezután a (Q) szabályt alkalmazzuk ismét az eredeti levezetésnek megfelelően, így kapjuk a $YA \nrightarrow B$ függőséget.

A másik eset az, amikor az (R) szabályt a (P) után alkalmazzuk: az $YC \nrightarrow B$ és az $YA \rightarrow B$ függőségekből kiindulva az $Y \nrightarrow B$ a (P) szabály alapján következik, majd $Y \nrightarrow A$ -t kaphatjuk az (R)-rel. Vegyük észre, hogy $YAC \rightarrow B$ -t előzőleg már le kellett vezetnünk az (S) szabállyal. Ebből és az $YC \nrightarrow B$ -ből (R)-rel $YC \nrightarrow A$ következik, és az $Y \nrightarrow A$ (P)-vel megkapható. (P) második alkalmazásával az eredetivel egyező módon ezután megkaphatjuk a $Y \nrightarrow B$ -t.

Mindezekből következik, hogy nem veszítünk következtetési lehetőséget azzal, ha (R) mindig megelőzi (P) és (Q) alkalmazását. Az pedig triviális, hogy (P) és (Q) sorrendje tetszőleges.

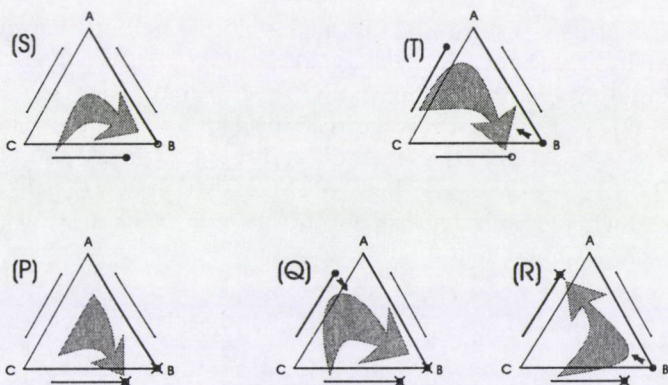
Ha $|G| = 1$, akkor a levezetés átalakítható az 5.2. lemma bizonyításában szereplő módon, mivel a PQRST szabályai speciális esetei az NST' szabályainak (ld. az 5.1. lemma bizonyítását), és így minden PQRST-beli levezetés NST'-beliként is fel fogható. Az átalakított levezetésben (R) alkalmazására csak egyszer kerül sor. \square

6. Következtetés grafikus úton

Implikált függőségek levezetése a függőségi rendszer diagramján közvetlenül is elvégezhető valamely axiómarendszer szabályainak grafikus megfelelőivel. Erre a legalkalmasabbnak a PQRST rendszer tűnik, a szabályok egyszerűsége miatt (csak egy halmazparamétert tartalmaznak, Y -t, és azon kívül két attribútumparamétert, B -t és A -t vagy C -t). Általánosságban a PQRST rendszerben egy levezetési lépés egy magasabb dimenziós alakzat (pl. háromszög) és egy nálánál eggyel kisebb dimenziós „határoló” alakzat (pl. a háromszög mellé rajzolt szakasz) egy-egy csúcspontjának kölcsönhatásaként tekinthető.

6.1. Grafikus szabályok

Elsőként az $n = 3$ -as esetet részletezzük.



5. ábra. Az (S), (T) és (P), (Q), (R) szabályok grafikus (háromszöges) megfelelői.

A szabályoknak megfelelő grafikus minták az 5. ábrán láthatók (háromattribútumos eset, $Y = \{C\}$). A kis fekete nyilak az implikációhoz szükséges kontextust (a *segédfüggőségeket*) jelölik, míg a nagy szürke nyilak az implikáció irányát, hatását. Az (S) szabály egy egyszerű bővítést jelöl (a bal oldal bővül egy attribútummal, így eggyel nagyobb dimenziós implikált függőség jön létre), míg a (T) szabály „forgatásnak” (rotáció) vagy „szűkítésnek” (redukció) tekinthető. A forgatás azt jelenti, hogy a függőség jobb oldala kicserélhető (egy megfelelő, eggyel magasabb dimen-

ziós függőség megléte esetén), míg a szűkítés egy attribútum elhagyását jelenti a bal oldalról (a bal oldal attribútumain teljesülnie kell hozzá a megfelelő függőségnek). A két interpretáció között a lényegi különbség az, hogy mit tekintünk az implikáció kiinduló függőségének és mit a szükséges kontextusnak. Mi a forgatásos megközelítést használjuk.

A negált függőségek bővítési szabálya a (Q), forgatási szabálya pedig az (R). Mindkettő pozitív segédfüggőséggel működik. E két szabály a (T) negáltjának is tekinthető. A (P) szűkítési (redukciós) szabály, a (Q)-val ellentétes hatású, de segédfüggőség nélküli. A (P) az (S) negáltjának felel meg.

A 3. ábrán jól követhető a grafikus szabályok alkalmazása. A bal szélső diagramon az (S) szabályt alkalmaztuk, míg a jobb szélsőn a (P)-t kétszer. A középső egy tranzitivitási esetet mutat be, melyet az (S) szabály kétszeri, majd ezt követően a (T) egyszeri alkalmazásával zárunk le.

E grafikus szabályminták megadhatók több attribútum esetére is. Négy attribútum esetén a szabályokban szereplő Y szerint már kétféle eset lehet, az ugyanis tartalmazhat egy vagy két attribútumot. A tetraéderes reprezentációban pl. az (S) már felrajzolt háromszöges mintája mellett megjelenik egy eggyel magasabb dimenziós minta: háromszögcsőcs bővítése tetraédercsúcscsá. A (T) szabály második mintája pedig egy háromszög forgatása megfelelő tetraédercsűcs megléte mellett. A 6. ábrán az (S) és a (T) négyzetes reprezentációra vonatkozó mintái láthatók. A tetraéder négyzetre történt cseréjével a szimmetria megbomlott, ezért egy esetben két vagy három minta felel meg.

A négyattribútumos esetre a 7. ábrán láthatunk példát: hogyan szimulálható a tranzitivitás az (S) és (T) szabályokkal a $\{C \rightarrow BD, BD \rightarrow A\} \vdash C \rightarrow A$ esetben. A kezdő diagramhoz elsőként a $C \rightarrow BD$ függőséget szét kell bontani $\{C \rightarrow B, C \rightarrow D\}$ -re. Ezután a következtetés például az alábbi sorrendben végezhető el: 1. $BD \rightarrow A \vdash_{(S)} BCD \rightarrow A$; 2. $C \rightarrow B \vdash_{(S)} CD \rightarrow B$; 3. $CD \rightarrow B$ (kontextus:) $BCD \rightarrow A \vdash_{(T)} CD \rightarrow A$; 4. $C \rightarrow D$ (kontextus:) $CD \rightarrow A \vdash_{(T)} C \rightarrow A$.

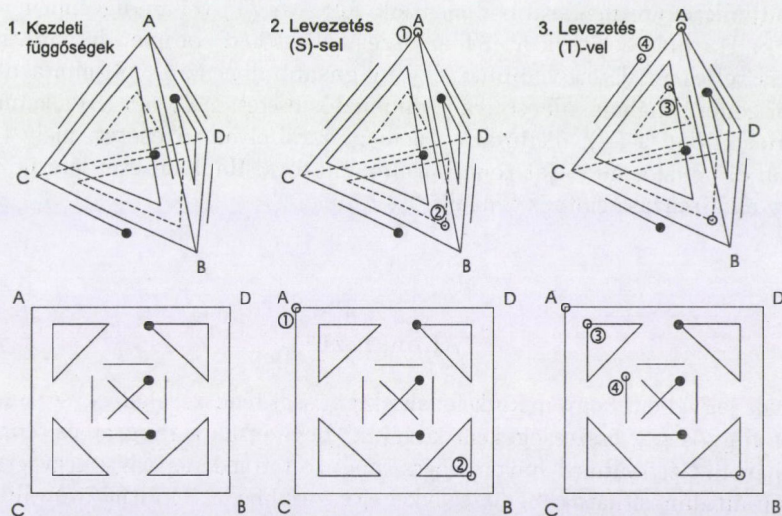
A fenti esetben a tranzitivitásig eljutottunk, de a halmaz még nem zárt. A 4. ábra egy zárt halmazt mutat be.

6.2. Az ST és az STRPQ algoritmus

Az egyik leggyakrabban felmerülő kérdés a függőségi halmazok kezelésekor (és a velük való sématervezéskor) az, hogy a kezdetben felvett függőségek (tele körök) milyen más függőségeket implikálnak, azaz milyen típusú kapcsolatot definiáltak a kezdeti függőségekkel. Ha negált függőségeink is vannak, az is elképzelhető, hogy ellentmondásos esetet adtunk meg. Ezeket a kérdéseket a függőségi halmaz lezárásával válaszolhatjuk meg, melyet a (PQR)ST axiomatizációval szisztematikusan is elvégezhetünk.

	$ Y =1$	$ Y =2$
(S)		
(T)		

6. ábra. Az (S) és a (T) szabály mintái a négyzetes reprezentációban.



7. ábra. Következtetési példa a tetraéderez, illetve a négyzetes reprezentációban: tranzitivitás (a számok egy lehetséges implikációs sorrendet jelölnek).

Az 5. fejezet 5.1. tétele (ii) állítása szerint teljes levezetési módszert jelent a pozitív függőségekre, ha először az (S) szabályt alkalmazzuk, amíg lehet, majd utána a (T)-t. Ezt a módszert *ST algoritmus*nak nevezzük.¹³ Ha negált függőségeink is vannak, a (P), a (Q) és az (R) szabályokkal mindezt bővítve (az 5.2. tétel (ii) része alapján) az alábbi, ún. *STRPQ* módszert kapjuk az összes implikált (pozitív és negatív) függőség szisztematikus levezetéséhez:

1. Az inputként megadott nemredundáns, szingleton függőségekből álló halmazzal kezdve,
2. bővítjük a függőségek bal oldalait az (S) szabály alapján, az összes lehetséges módon, majd
3. alkalmazzuk a (T) szabályt amíg lehet, ezután
4. alkalmazzuk az (R) szabályt amíg lehet, majd
5. szűkítjük és bővítjük a negált függőségek bal oldalait a (P) és a (Q) szabály alapján, az összes lehetséges módon.
6. Az output az így keletkezett függőségi halmaz lesz.

A fenti algoritmus akár közvetlenül az input függőségi rendszer diagramján is elvégezhető. Az általánosított háromszöges reprezentáció alapján elvileg adatszerkezet is tervezhető a függőségi rendszerekhez, melyen az algoritmus természetes módon futtatható.

Az ST módszer még konkrétabbá tehető a dimenziók figyelembe vételével. Először kezdjük az (S) lehető legalacsonyabb dimenziós mintáival, majd folyamatosan haladjunk egyre magasabb dimenziók felé. A (T)-vel pedig éppen fordítva haladjunk. Ha már beláttuk az ST módszer teljességét, könnyen látható, hogy ez esetben is teljes módszert kapunk: egy magasabb dimenziós (S)-minta alkalmazása nem generál nálánál alacsonyabb dimenziós esetet, melyben (S) alkalmazható lenne. Hasonlóan a (T) alkalmazása nem generál olyan új esetet, mely (T) egy magasabb dimenziós mintáját tenné alkalmazhatóvá. Ha ilyen eset létezik, az már a szabály alkalmazása előtt is fennállt.

7. Konklúzió

Annak jegyében, hogy a funkcionális függőségi rendszereket egységként és ne csupán a függőségek összességeként kezeljük, bevezettük a diagramos reprezentációkat (három attribútumra háromszöges, négyre tetraéderes vagy négyzetes, öt-re hasonlóan általánosítható). Segítségükkel egyszerűbbé, áttekinthetővé válik a függőségi rendszerek kezelése, megkönnyítve a grafikus adatbázis-tervezést.

¹³Ez a módszer adta az alapját a PROLOG programnak, amellyel a lehetséges függőségi rendszereket generáltuk és összeszámoltuk (ld. 3. fejezet).

A függőségek egyszerűsített formalizmusa (miszerint a redundánsokkal, köztük a triviálisokkal, valamint a nem kanonikusokkal (nemsingletonokkal) nem foglalkozunk) és az ehhez megalkotott ST és PQRS szabályrendszer megszünteti a függőségek hagyományos rendszeréből adódó redundanciákat. A szabályok a grafikus reprezentációhoz is jól illeszkednek: megadhatók nekik megfelelő, diagramon alkalmazható minták, így kis sémákra a grafikus következtetés könnyen, akár kézzel is elvégezhető. Sőt, megadható olyan szabályalkalmazási sorrend, mely teljes, szisztematikus módszert ad egy halmaz lezárására. Ez leírható az $(S)^*(T)^*(R)^*((P)^*(Q)^*)$ reguláris kifejezéssel. Az axiomatizáció helyességét és teljességét a nemredundáns, singleton függőségekre nézve az 5.1. és 5.2. tétel (i) állításai mondják ki, az említett sorrendiséget pedig ezen tételek (ii) állításai.

Nagyobb sémák grafikus reprezentációjára más módszert kell keresni, folyamatban van az itt bemutatottnak a zárt attribútumhalmazok hálójával [20, 21, 12] való összevetése. Szükséges lehet további dekompozíciós, szeparációs lehetőségek ezen keretek közti vizsgálata is. Szintén érdekes probléma más típusú függőségek hasonló reprezentációjának megadása.

Az (S) és (T) szabályok alapján kis sémákra (legfőljebb 5 attribútum esetén) meghatároztuk a lehetséges zárt függőségi halmazok számát. Nagyobb sémákra ($n \geq 6$) ennek általánosítása egyelőre megoldatlan, csupán becslések vannak [10, 21].

Köszönet

Ezúton köszönjük Ásványi Tibor segítségét a PROLOG program hatékonyságának növelésében és Regéci Zoltán Csaba közreműködését a program futtatásában. Ezen túlmenően hálásak vagyunk Molnár Andrea és Benczúr András hasznos megjegyzéseikért, észrevételeikért.

Hivatkozások

- [1] S. ABITEBOUL AND R. HULL AND V. VIANU: *Foundations of databases*. Addison-Wesley, 1995.
- [2] W. W. ARMSTRONG: *Dependency structures of data base relationships*. In J. L. Rosenfeld, editor, *Information Processing 74, Proceedings of IFIP Congress 74*, Stockholm, Aug. 5-10, 1974. North-Holland, Amsterdam. (pages 580–583)
- [3] P. ATZENI AND V. DE ANTONELLIS: *Relational database theory*. Addison-Wesley, 1993.
- [4] CATRIEL BEERI AND MARTIN DOWD AND RONALD FAGIN AND RICHARD STATMAN: *On the Structure of Armstrong Relations for Functional Dependencies*. J. ACM 31(1):30–46, 1984.

- [5] J. BISKUP: *Boyce-Codd normal forma and object normal forms*. Information Processing Letters, 32(1):29–33, 1989.
- [6] J. BISKUP: *Foundations of information systems*. Vieweg, Wiesbaden, 1995. (német nyelvű)
- [7] J. BISKUP AND J. DEMETROVICS AND L. O. LIBKIN AND M. MUCHNIK: *On relational database schemes having a unique minimal key*. J. of Information Processing, 27:217–225, 1991.
- [8] J. BISKUP AND T. POLLE: *Decomposition of database classes under path functional dependencies and onto constraints*. In Proc. FoKS'2000, LNCS 1762, pages 31–49. Springer, 2000.
- [9] P. DE BRA AND J. PAREDAENS: *Horizontal decompositions and their impact on query solving*. SIGMOD Rec., 13(1):46–50, 1982.
- [10] G. BUROSC AND J. DEMETROVICS AND G. O. H. KATONA AND D. J. KLEITMAN AND A. A. SAPOZHENKO: *On the number of databases and closure operations*. TCS 78(2):377–381, 1991.
- [11] R. CAMPS: *From ternary relationship to relational tables: A case against common beliefs*. ACM SIGMOD Record, 31(2), pages 46–49, 2002.
- [12] N. CASPARD AND B. MONJARDET: *The lattices of closure systems, closure operators, and implicational systems on a finite set: a survey*. Discrete Applied Mathematics 127:241–269, 2003.
- [13] CHEN & ASSOCIATES, Baton Rouge, LA, USA. *ER-designer reference manual*, 1986–1989.
- [14] P. P. CHEN: *The entity-relationship model: Toward a unified view of data*. ACM TODS 1(1):9–36, 1976.
- [15] P. P. CHEN, editor: *Proc. 1st Int. ER Conf., ER'79: Entity-Relationship Approach to Systems Analysis and Design*. Los Angeles, USA, 1979. 1980, North-Holland, Amsterdam.
- [16] E. F. CODD: *A relational model for large shared data banks*. CACM, 13(6):197–204, 1970.
- [17] J. DEMETROVICS AND N. X. HUY: *Structure of Closure in Relational Databases*. In Conference on intelligent management systems, pages 148–154. Bulgarian Academy of Sciences, Varna, 1989.
- [18] J. DEMETROVICS AND N. X. HUY: *Translations of relation schemes and representations of closed sets*. PU.M.A.Ser. A, 1(3–4):299–315, 1990.
- [19] J. DEMETROVICS AND G. O. H. KATONA: *Combinatorial problems of database models*. In Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 42, Algebra, Combinatorics and Logic in Computer Science, pages 331–352, Győr, 1983.
- [20] J. DEMETROVICS AND L. LIBKIN AND I. B. MUCHNIK: *Functional Dependencies in Relational Databases: A Lattice Point of View*. Discrete Applied Mathematics, 40(2):155–185, 1992.
- [21] J. DEMETROVICS AND L. O. LIBKIN AND I. B. MUCHNIK: *Functional dependencies and the semilattice of closed classes*. In Proc. MFDBS'89, LNCS 364, pages 136–147, 1989.
- [22] J. DEMETROVICS AND A. MOLNAR AND B. THALHEIM: *Graphical and Spreadsheet Reasoning for Sets of Functional Dependencies*. Technical Report 402, Graphical and Spreadsheet Reasoning for Sets of Functional Dependencies, <http://www.informatik.uni-kiel.de/reports/2004/0402.html>, 2004.

- [23] J. DEMETROVICS AND A. MOLNAR AND B. THALHEIM: *Graphical Reasoning for Sets of Functional Dependencies*. In Proceedings of ER 2004, Lecture Notes in Computer Science 3288, pages 166-179. Springer, 2004.
- [24] J. DEMETROVICS AND V. D. THI: *Some problems concerning Armstrong relations of dual schemes and relation schemes in the relational datamodel*. Acta Cybernetica, 11(1-2):35-48, 1993.
- [25] M. KLETTKE: *Akquisition von Integritätsbedingungen in Datenbanken*. DISBIS 51. infix-Verlag, St. Augin, 1998.
- [26] HEIKKI MANNILA AND KARI-JOUKO RÄIHÄ: *Small Armstrong relations for database design*. In PODS '85: Proceedings of the fourth ACM SIGACT-SIGMOD symposium on Principles of database systems, pages 245-250, New York, NY, USA, 1985. ACM Press.
- [27] C.W. MORRIS: *Foundations of the Theory of Signs*. In International Encyclopedia of Unified Science, University of Chicago Press, 1955.
- [28] V.C. STOREY AND H.L. YANG AND R.C. GOLDSTEIN: *Semantic integrity constraints in knowledge-based database design systems*. Data & Knowledge Engineering, 20:1-37, 1996.
- [29] B. THALHEIM: *Open problems in relational database theory*. Bull. EATCS, 32:336-337, 1987.
- [30] B. THALHEIM: *Entity-relationship modeling – Foundations of database technology*. Springer, Berlin, 2000. (Id. <http://www.informatik.tu-cottbus.de/~thalheim/HERM.htm>)
- [31] V. D. THI: *Minimal keys and antikeys*. Acta Cybernetica, 7:361-371, 1986.
- [32] J. D. ULLMAN AND J. WIDOM: *Adatbázisrendszerek – alapvetés*. Panem-Prentice Hall, 1998 (magyar nyelvű változat).
- [33] C.-C. YANG: *Relational Databases*. Prentice-Hall, 1986.

(Beérkezett: 2006. május 27.)

DEMETROVICS JÁNOS

MTA SZTAKI

1111 Budapest, Kende u. 13-17.

Email: demetrovics@sztaki.hu

MOLNÁR ANDRÁS

ELTE IK, Információs Rendszerek Tanszék

1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C

Email: modras@elte.hu

BERNHARD THALHEIM

Institut für Informatik und Praktische Mathematik

Christian-Albrechts-Universität Kiel

Olshausenstraße 40, 24098 Kiel, Németország

Email: thalheim@is.informatik.uni-kiel.de

GRAPHICAL AXIOMATIZATION OF SETS OF FUNCTIONAL DEPENDENCIES
IN RELATIONAL DATABASES

JÁNOS DEMETROVICS, ANDRÁS MOLNÁR AND BERNHARD THALHEIM

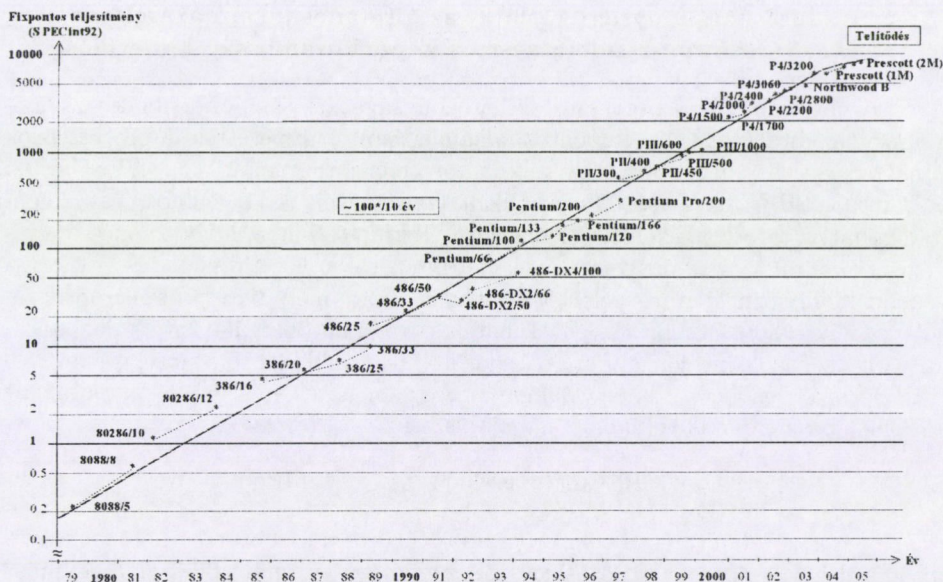
An important task during relational database schema design is to specify invariant properties, which the database instances must obey. These semantical conditions can be formulated as integrity constraints. The most fundamental type of constraints is functional dependency. Direct usage of its traditional formalism is rare in practice, due to its complexity and redundancies. However, in some cases, a complete and unambiguous specification can only be reached by using functional dependencies. We propose a novel approach for representing sets of functional constraints for small relational schemata. This graphical representation allows management of constraint sets much simpler and surveyable than the traditional notation. It supports reasoning on constraint sets in a natural way by an appropriate, powerful axiomatization and allows easy derivation. The axiomatization has an order of rule application property, yielding an algorithmic method for deriving the full knowledge an initial set of constraints holds. Considering complexity, we have computed the number of different possible dependency sets and types for schemata with at most five attributes.

KORSZAKVÁLTÁS A PROCESSZOROK FEJLŐDÉSÉBEN

SIMA DEZSŐ

1. Bevezetés

Több mint két évtizede – közel napjainkig – a processzorok teljesítménye megdöbbentően gyors ütemben folyamatosan emelkedett, amint ezt a vilá piacon vezető piaci részesedésű Intel x86 család fixpontos teljesítményének változását bemutató 1. ábra illusztrálja. E szerint több mint két évtizeden át az Intel x86 processzorok fixpontos teljesítménye 10 évente mintegy megszázsorozódott. Ugyanakkor az elmúlt néhány évben jól kivehetővé vált egy új fejlődési szakasz, melyben a processzor teljesítmények növekedési üteme lényegesen lelassult és a növekedési görbe mindinkább egy telítődési görbéhez kezdett hasonlítani. De mi is játszódott le az elmúlt években, milyen okok idézték elő ezt a gyökeres változást?



1. ábra. Az Intel x86 család fixpontos teljesítményének növekedése [1], [2]

Az okok meghatározásához jó kiindulásul szolgál a processzorok abszolút műveleti teljesítményének vizsgálata.

Utasítás szinten a processzorok abszolút műveleti teljesítménye, azaz az időegység alatt végrehajtott műveletek átlagos száma (P_O) az alábbi összefüggéssel írható le [3]:

$$P_O = f_c \cdot IPC \cdot OPI \cdot \eta,$$

ahol f_c órafrekvencia, IPC a ciklusonként kibocsátott utasítások átlagos száma, OPI utasításonként a műveletek átlagos száma, és η a spekulatív végrehajtás hatékonysága, azaz az eredményesen végrehajtott utasítások száma/kibocsátott utasítások száma.

A fenti összefüggés két komponens szorzataként is felírható:

$$P_O = f_c \cdot E_p,$$

ahol $E_p = IPC \cdot OPI \cdot \eta$ az egy óraciklus alatt eredményesen végrehajtott műveletek átlagos számát, azaz a processzor hatékonyságát tükrözi.

E szerint utasítás szinten a processzorok teljesítménye alapvetően két úton fokozható; vagy a processzor órafrekvenciájának (f_c) vagy a hatékonyságának (E_p) a növelésével. A következőkben vizsgáljuk meg, hogy e teljesítmény összetevők növekedési üteme idővel hogyan változott az Intel processzorok példáján!

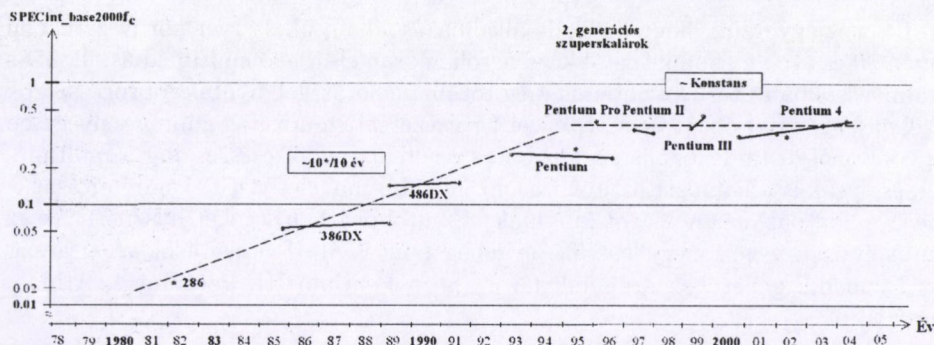
2. Az első hatékonysági korlát – az általános alkalmazásokban utasításszinten rendelkezésre álló párhuzamosság kimerülése

Elsőként tekintsük a processzorok hatékonyságát, és összpontosítsuk vizsgálódásunkat az általános célú (fixpontos) alkalmazásokra. Ez esetben a processzorok hatékonysága az általános célú fixpontos mérőprogramok (pl. SPECint92, SPECint95, SPECint_base2000) publikált eredményeinek [1] azonos órafrekvenciára vonatkoztatott értékeivel jellemezhető. Tekintettel arra, hogy az egyes mérőprogramok által szolgáltatott eredmények egymástól jó közelítéssel csak egy konstansban különböznek, nincs jelentősége annak, hogy mely fixpontos mérőprogramot vesszük alapul. A processzorok hatékonyságának vizsgálatához válasszuk a SPECint_base2000 mérőprogramot, és normáljuk a publikált teljesítményértékeket 1 MHz órafrekvenciára. Ekkor valamely processzor hatékonysága (E_p) a publikált SPECint_base eredményekből az alábbiak szerint határozható meg:

$$E_p = \text{SPECint_base2000}/f_c \quad [1/\text{MHz}].$$

A processzorok általános célú programok futtatása esetén mért hatékonyságában idővel bekövetkezett változásokat jól szemlélteti az Intel x86 család egymást követő processzorainak hatékonyságát feltüntető 2. ábra.

A 2. ábra szerint az x86 család processzorainak hatékonysága időben jó közelítéssel két markánsan eltérő szakaszra bontható; az első időszakban, azaz a 2. generációs szuperskalár Pentium Pro megjelenéséig a processzorok hatékonysága jelentős mértékben, tízévente közel egy nagyságrenddel nőtt, míg az azt követő



2. ábra. Az Intel x86 processzorok hatékonyságának időbeli változása fixpontos alkalmazások esetén [1], [2]

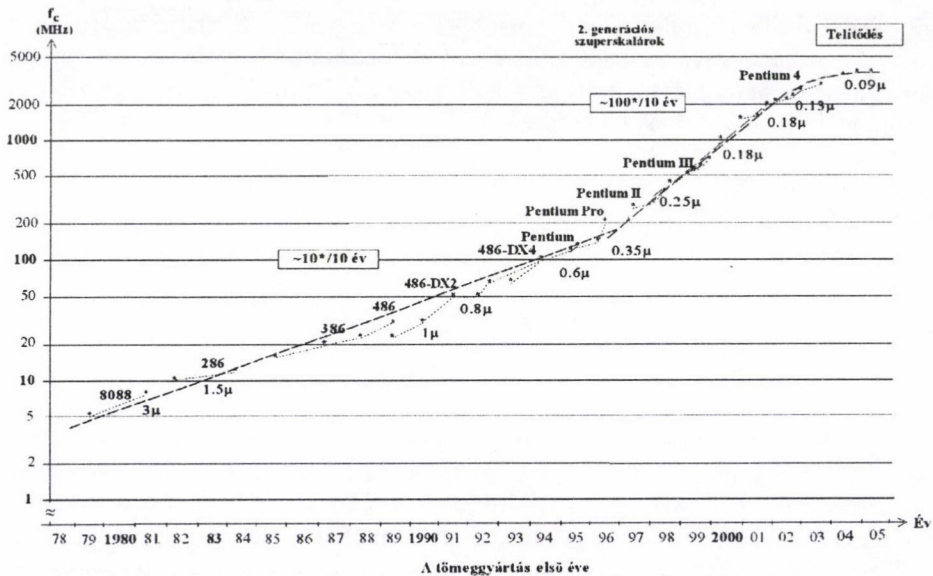
időszakban az L2 gyorsítótár processzorlapkára való integrálása (Pentium III) és kapacitásának jelentős növelése (Pentium 4) ellenére közelítőleg állandó maradt. Az első szakaszban a hatékonyság emelésének két forrása volt, egyrészt a szóhossz növelése 16 bitről (I 286) 32 bitre (I 386), másrészt a feldolgozás párhuzamosságának a fokozása, azaz az egy óraciklus alatt eredményesen feldolgozott utasítások számának (IPC) a növelése, négy lépésben. Az első lépés az időbeli párhuzamosság, azaz a futószalag-alapú feldolgozás bevezetése volt (I 386), a másodikat a futószalag technika keltette feldolgozási szűk keresztmetszetek feloldása jelentette az elágazásbecslés és a gyorsítótárak alkalmazása révén, majd az időbeli párhuzamosságban rejlő lehetőségek kimerülését követően a következő lépés szükségszerűen a kibocsátási párhuzamosság, azaz a szuperskalár feldolgozás bevezetése volt. A hatékonyság növelésének utolsó momentumát a szuperskalár kibocsátás bevezetésével adódó feldolgozási szűk keresztmetszetek feloldása képezte megfelelő technikák alkalmazásával, mint pl. az elődekódolás, utasításvárokozttatás, regiszter átnevezés, több portos, nem blokkoló gyorsítótárak stb. [3]. Az irodalomban megjelent áttekintések szerint a második generációs szuperskalárok megjelenéséig hasonló ütemben növekedett más processzorcsaládok (Alpha, MIPS, PA-RISC, POWER, PowerPC, SPARC) egymást követő modelljeinek fixpontos teljesítménye ill. hatékonysága is [4].

A második generációs szuperskalárok megjelenésével viszont új korszak köszöntött be a processzorok fejlődésében, mivel a második generációs 3-utasítás/óraciklus feldolgozási szélességű CISC magok (mint pl. a Pentium Pro) vagy a 4-utasítás/óraciklus szélességű RISC magok érdemben már kiaknázzák az általános célú programokban utasítás szinten rendelkezésre álló 4-8 utasítás/ciklusnyi párhuzamosságot [5]. Következésképpen a második generációs szuperskalárokat követően a processzorok hatékonysága általános célú alkalmazásokban a feldolgozási szélesség növelésével már nem volt lényegesen tovább fokozható, azaz a második generációs szuperskalárokkal kezdődően a processzorok teljesítményének további növelése általános célú alkalmazásokban egy hatékonysági korlátba ütközött.

Itt megjegyezzük, hogy dedikált alkalmazásokban, pl. szerver környezetekben vagy a 90-es évek második felétől kezdve rohamosan elterjedő multimédiás, ill. 3D-s alkalmazásokban utasításszinten is még további lehetőségek nyíltak a processzorok hatékonyságának a fokozására. Szerver környezetekben utasítás szinten lényegesen nagyobb mérvű funkcionális párhuzamosság állhat rendelkezésre, míg a multimédiás és grafikus alkalmazások utasításonként több művelet (OPI) végrehajtását is lehetővé adatpárhuzamosságot kínálnak. Ez utóbbi lehetőségeket hasznosítják az elmúlt évtized végén megjelent fix- és lebegőpontos SIMD utasításokkal kiegészített harmadik generációs szuperskalárok (pl. a Pentium III, Pentium 4, Athlon, Power 3).

3. Az órajekvenciák rohamos növelése, a következmények

A következőkben vizsgáljuk meg, hogy a tekintett időszakban a processzor teljesítmények növelésének másik lehetséges dimenziójában; az órajekvenciák növelésében, milyen változások következtek be az Intel x86 processzorok példáján (ld. a 3. ábrát). Itt megjegyezzük, hogy az Intel x86 processzorok esetében az alábbiakban megfogalmazott megállapítások a processzorok fejlődésére vonatkozóan általában is érvényesek.



3. ábra. Az Intel x86 processzorok órajekvenciájának növekedése [2]

A 3. ábrában az órajekvenciák növekedési üteme három jól elkülönülő szakaszra tagolódik. Az első szakaszban, a 2. generációs szuperskalár Pentium Pro

megjelenéséig, a processzorok órafrekvenciája közelítőleg egy nagyságrend/10 év ütemben nőtt. Ebben a szakaszban a processzorok hatékonyságának és órafrekvenciájának növelése közel azonos mértékben ($10^*/10$ év) járult hozzá a processzor teljesítmények közelítőleg $100^*/10$ év ütemű fokozásához. Ezt követően azonban, az általános alkalmazásokban utasításszinten rendelkezésre álló párhuzamosság egyre inkább kimerült, és így a processzorok hatékonyságának további növelése korlátokba ütközött és megállt. Ezért a 2. generációs Pentium Pro-t, ill. általában a 2. generációs szuperskalárokat követően a processzor teljesítmények növelésének alapvető forrása az órafrekvencia emelése lett, és a processzorok fejlődésében egy új korszak sejtett fel – az órafrekvenciák rohamos növelésének időszaka.

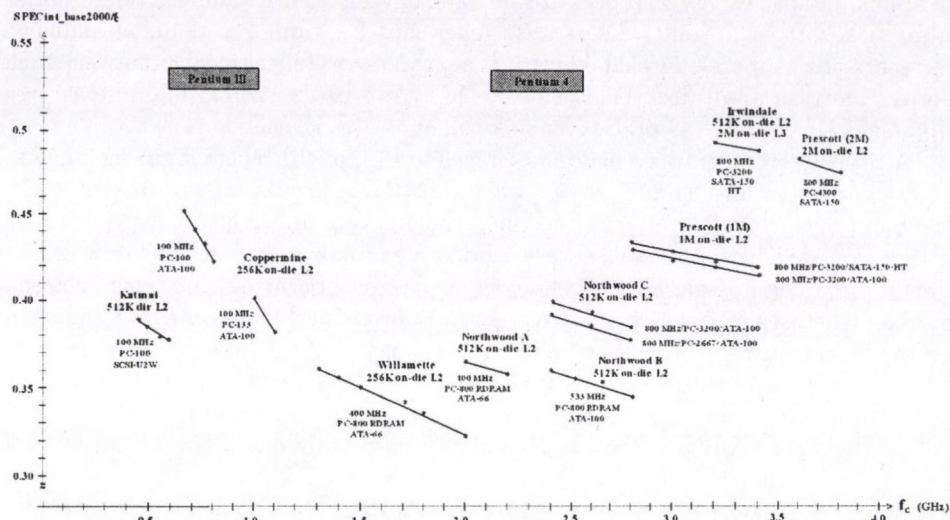
A processzorok órafrekvenciájának növelésére alapvetően két lehetőség kínálkozik; a gyártási technológia fejlesztése az áramkörü struktúrák méretcsökkentése érdekében (jellemzően 2-évente $0,7x$ -es mértékben), valamint a futószalag fokozatok kritikus logikai hosszának csökkentése a futószalag fokozatok számának emelésével, azaz a futószalag hosszának a növelésével. A processzorgyártó cégek természetesen mindkét lehetőséggel egyidejűleg éltek, így például az Intel közel két éves ritmusban vezette be egymást követően a 0,25, 0,18, 0,13 majd a $0,09\ \mu\text{m}$ -es gyártási technológiákat, és ezzel párhuzamosan a futószalag fokozatok kritikus logikai hosszának csökkentése érdekében egymást követő processzoraiban jelentősen növelte a futószalagok hosszát. Amíg a Pentium Pro alap-futószalagja mindössze 12 fokozatból állt, az órafrekvenciák erőteljes növelésének szándékával kifejlesztett Netburst architektúrát megvalósító Pentium 4 Willamette és Prescott magok alap-futószalagja már megközelítőleg 20, ill. 30 fokozatú lett. A technológiai és mikroarchitektúrális fejlesztések együttes eredményeképpen Intel a 2. generációs Pentium Pro-t követően processzorai órafrekvenciáját drasztikusan, tíz évre vonatkoztatva közel 100-szoros mértékben tudta növelni (ld. a 3. Ábrát).

Az órafrekvenciák erőltetett ütemű, erőteljes növelése az elmúlt évtized második felében három sarkalatos fejlődési korlát kiváltó okává vált, nevezetesen a második hatékonysági-, a disszipációs- és a párhuzamos buszok frekvencia korlátjának megjelenéséhez vezetett. E kérdéseket részletezzük a következő fejezetekben.

4. A második hatékonysági korlát – a processzor és a processzort kiszolgáló alrendszerek közötti sebességgöllő kinyílása

A 2. generációs szuperskalárokat követően az órafrekvenciák rohamos, tízévente mintegy 100-szoros mértékű növekedésének időszakában a mikroarchitektúra egyes kiszolgáló alrendszereinek (operatív tár, gyorsítótárak, processzorbusz) a „sebességnövekedése” egyre kevésbé tudta követni a processzorok igen gyors sebességnövekedését, és így egy egyre táguló sebességgöllő nyílt ki a processzor és egyes kiszolgáló alrendszerei között. A legeklektánsabb sebesség különbség az operatív tár tekintetében alakult ki, mely egyrészt az operatív tár ciklusokban mért elérési idejének folyamatos növekedésében, másrészt a memóriák átviteli rátájának a processzorok

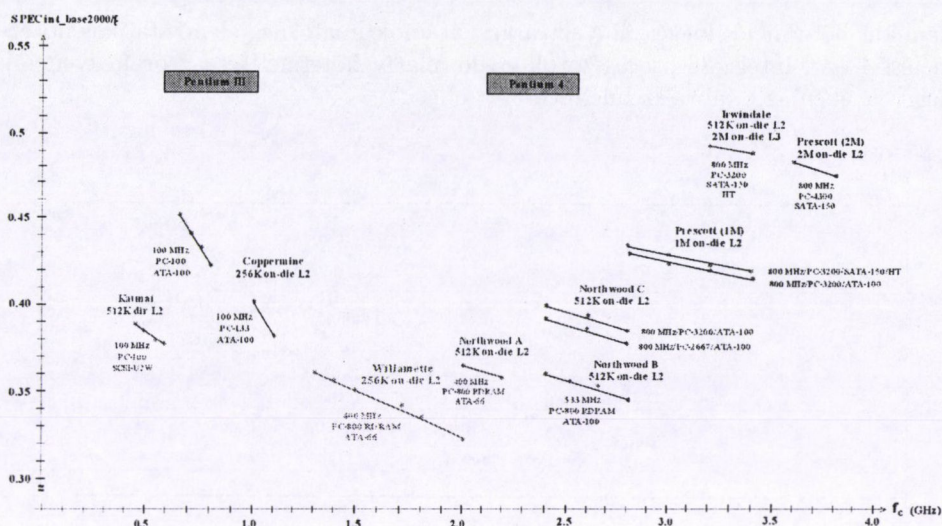
órafrekvenciájához képest lényegesen lassabb növekedési ütemében nyilvánult meg. E cikkben területi korlátok miatt nem tárgyaljuk kvantitatívan e kérdéseket és mindössze arra szorítkozunk, hogy bemutassuk a fent említett, egyre táguló sebességolló kihatását a processzorok hatékonyságára, a Pentium III és a Pentium 4 processzorcsaládok példáján (ld. a 4. ábrát).



4. ábra. Az Intel Pentium III és a Pentium 4 processzorcsalád egyes modelljeinek hatékonysága [1], [2]

Az ábra szerint növekvő órafrekvenciákon, a GHz tartományban, a kiszolgáló alrendszer egyre nagyobb mérvű relatív elmaradása miatt a mikroarchitektúra hatékonysága azonos processzor paraméterek mellett számottevően csökken. Például miközben a Pentium III Coppermine magok órafrekvenciája 0,65 GHz-ről 1,1 GHz-re nőtt, hatékonyságuk a kezdeti mintegy 0,45-ös értékről közelítőleg a 0,38-as értékre esett vissza, annak ellenére, hogy a magasabb frekvenciájú magok esetén a processzorbusz sebességét 100 MHz-ről 133 MHz-re növelték. Az ábra egyúttal azt is érzékletesen szemlélteti, hogy a mikroarchitektúra hatékonyságának romlása elsődlegesen az L2 gyorsítótár méretének a növelésével másodlagosan a processzorbusz vagy a memória átviteli rátájának az emelésével részlegesen kompenzálható. De mindez nem változtat azon az alapvető tényen, hogy GHz tartományban az órafrekvencia növelése egyre nagyobb mértékű hatékonyságcsökkenést okoz, és ennek következtében az órafrekvencia növelésével csupán egyre csökkenő mértékű teljesítménynövekedés érhető el.

Itt megjegyezzük, hogy a 2. generációs superskalárokat követően, az órafrekvenciák erőteljes növelésének időszakában az eleve nagyobb órafrekvenciákon működő, de kisebb hatékonyságú RISC processzorok szükségszerűen nagyobb hatékonyságvesztéssel szembesültek el, mind az alacsonyabb órafrekvenciákon működő



5. ábra.

de hatékonyabb CISC processzorok. Következésképpen míg a processzorteljesítmények versenyében általános alkalmazások esetén az elmúlt évtized közepén a RISC processzorok (elsődlegesen az Alpha család) voltak az élen, az évtized második felében a RISC processzorok a teljesítmény versenyben egyre inkább háttérbe szorultak a CISC processzorokkal szemben [6], és a teljesítmény versenyben a CISC processzorok kerültek az első helyre. Döntően emiatt az elmúlt évtized végén a legtöbb RISC gyártó beszüntette RISC családja (Alpha, MIPS, PA-RISC, PowerPC) továbbfejlesztését, és mindössze két RISC család maradt versenyben: IBM POWER, ill. SUN UltraSPARC családja.

5. A hőtermelési korlát

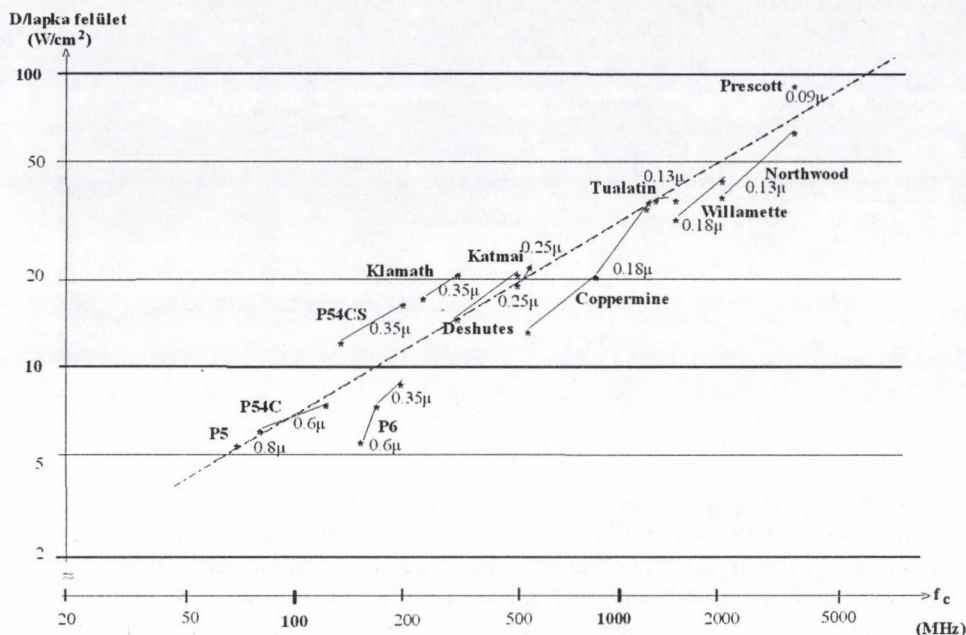
A processzorok hőtermelésének mértéke az (1) összefüggéssel adható meg [7]. Eszerint a hőtermelés dinamikus és statikus komponensekből áll, ahol a dinamikus komponens a kapuk összesített elosztott kapacitásának feltöltéséből és kisütéséből adódik, míg a statikus komponens a szivárgási áramok miatti hőtermelést jeleníti meg.

$$D = A \cdot C \cdot V^2 \cdot f_c + V \cdot I_{\text{leak}} \quad (1)$$

ahol A az aktív kapuk részaránya, C a kapuk összesített elosztott kapacitása, V tápfeszültség, f_c óráfrekvencia, I_{leak} szivárgási áram.

A fenti összefüggés szerint az óráfrekvenciák növekedésével a processzorok dinamikus hőtermelése lineárisan nő (egyébként azonos paraméterek mellett). A di-

namikus hőtermelés kiegészül a szivárgási áramok miatt megjelenő statikus hőtermeléssel. Az Intel x86 processzorok eredő relatív hőtermelését az órajelekvenciák függvényében az 6. ábra szemlélteti.



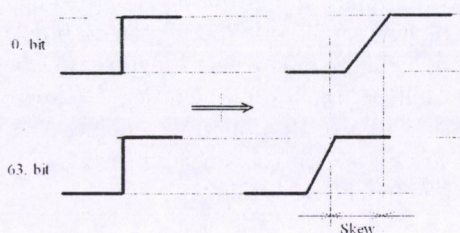
6. ábra. Intel x86 processzorok fajlagos hőtermelése [2]

E szerint magasabb órajelekvenciákon a hőtermelés is rohamosan nő és a 2,8–3,4 GHz órajelekvenciákon bejelentett Prescott magok fajlagos, 1 cm² lapkafelületre eső hőtermelése már megközelíti a 100 Watt/cm² értéket. Léghűtést feltételezve a 100 Watt/cm² körüli fajlagos hőtermelés viszont már nehezen kezelhető hűtési problémákat okoz, így a Pentium 4 órajelekvenciájának növelése egyre keményebb határokba ütközött. E miatt megtorpant a Pentium 4 család korábban imponálón gyors órajelekvencia növekedése (ld. a 3. ábrát) és Intel a korábban már bejelentett 4 GHz, ill. nagyobb órajelekvenciájú Pentium 4 modellek visszavonására, sőt a Netburst architektúra továbbfejlesztésének leállítására [7], valamint tervezési filozófiájának gyökeres módosítására kényszerült [9].

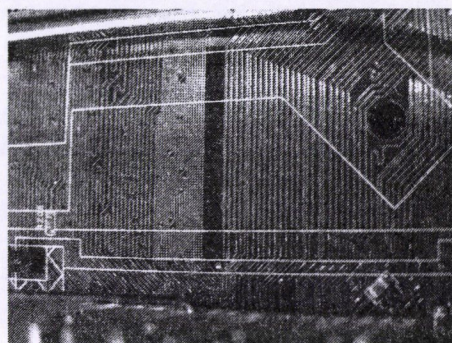
6. Párhuzamos buszok frekvenciakorlátja

Az órajelekvenciák GHz tartományban történő növelésekor egy párhuzamos busz egyes bitvezetékei között már érzékelhető futási idő különbségek (skew) jelentkeznek a bitvezetékek hosszbeli eltérése, az egyes bitvezetékek eltérő kapacitív

jellemzői által okozott jelmeredekség eltérések és a jelenlévő zajok miatt; melyek növekvő frekvenciákon – az impulzus szélességhez viszonyítva egyre dominánsabbá válnak (ld. a 7. ábrát).

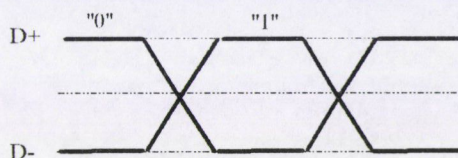


7. ábra. Párhuzamos buszok bitvezetékei közötti futási idő különbségek (skew)



8. ábra. A processzor bitvezetékei között fellépő futási idő különbségek kiegyenlítése az MSI 915G Combo alaplapon

Annak ellenére, hogy az alaplakok tervezésénél nagy figyelmet fordítanak a processzorbusz egyes bitvezetékei közötti futási idő különbségek minél jobb kiegyenlítésére (ld. a 8. ábrát), GHz tartományban a processzorbuszok sebességének a növelése az előzőekben vázolt problémák miatt egyre nagyobb nehézségekbe ütközik, és egyre nyilvánvalóbban megjelenik a párhuzamos buszok sebességkorlátja. Ezért a párhuzamos processzor buszokat napjainkban szükségszerűen egyre inkább felváltják a nagy sebességű soros buszok (pl. a Hypertransport busz). A soros buszok bitenként két vezetékkel használva differenciális, kis amplitúdó váltású (néhány száz mV) jelátvitelt valósítanak meg (ld. a 9. ábrát).



9. ábra. Jelátvitel soros buszon

A gyors (egy vagy néhány Gbit/sec sebességű), egyszerűen skálázható soros buszok rohamos elterjedésének másik oka a periféria buszok vonatkozásában (USB, PCI-Express, SATA, SAS stb.) a vezetékszám drasztikus redukációjával elérhető ráfordítás csökkentés.

7. Összegzés

Általános célú alkalmazásokban az utasításszinten rendelkezésre álló párhuzamosság a második generációs szuperskalárok megjelenésével már a 90-es évek derekán kimerült. Az ezt követő közel egy évtizedben a processzor teljesítmények fokozásának színtere az órajekvenciák intenzív növelése lett, de az elmúlt néhány évben bizonyossá vált, hogy ez az út az órajekvenciák növekedésével egyre világosabban kirajzolódó három korlát miatt tovább már nem járható. A hatékonyság növelését célzó hardver többletráfordítások egyre csökkenő mértékben térülnek meg, a fokozódó hőtermelés mértéke túllépi a léghűtéssel kezelhető tartományt, a párhuzamos buszok egyes bitvezetékei között fellépő futási idő különbségek (skew) egyre inkább megközelítik a ciklusidőt, és így bekorlátozzák a buszfrekvenciát. Más megfogalmazásban: a processzorteljesítményeknek az órajekvenciák intenzív növelésére alapozott stratégiája az elmúlt években hatékonysági, hőtermelési és buszfrekvencia növelési korlátokba ütközött.

E változások hatására a fejlesztések színtere az utasítás szintről a szálszintre tevődött át, az órajekvenciák növelése érdekében alkalmazott hosszú futószalagokra (20-30 fokozat) alapozó processzorokat szükségszerűen felváltják a közepes (10-15) fokozatszámú, alacsonyabb órajekvenciájú, lassabb, de hatékonyabb mikroarchitektúrájú többmagos processzorok, míg a párhuzamos processzorbuszokat a sebességkorlátok elérése miatt, ill. a párhuzamos periféria buszokat a ráfordítás csökkentése érdekében kiszorítják a gyors, egyszerűen skálázható soros buszok.

Hivatkozások

- [1] SPEC CPU92, CPU95, CPU2000 results,
<http://www.spec.org>
- [2] *Microprocessor Quick Reference Guide*,
<http://www.intel.com/pressroom/kits/quickref.htm>
- [3] D. Sima: „*Decisive Aspects in the Evolution of Microprocessors*”, *Proceedings of IEEE*, Vol. 92. No. 12, pp. 1896-1923, (December 2004)
- [4] J. Birnbaum: „*Architecture at HP: Two Decades of Innovation*”, *Microprocessor Forum*, San Jose, California, (October 14, 1997),
<http://www.hpl.hp.com/speeches/mpforum.html>
- [5] D.W. Wall: „*Limits of Instruction Level Parallelism*”, *Proc. 4th Int. Conf., Architectural Support for Programming Languages and Operating Systems (ASPLOS)*, pp. 176-188, (1991)
- [6] *X86-64 Technology White Paper*, AMD Inc., Sunnyvale, CA, (2000),
http://www.amd.com/us-/assets/content_type/white_papers_and_tech_docs/x86-64_wp.pdf

- [7] N. S. Kim et al., „*Leakage Current: Moore's Law Meets Static Power*”, *Computer*, Vol. 36, No. 12, pp. 68–75, (December 2003)
- [8] E. Smith: *Intel kills off 4 GHz project, moves team to multicore*,
<http://www.geek.com/news/2004Oct/bch20041015027427.htm>
- [9] R. Ronen: „*The Thermal Wall: where it came from and how to live with it?*”, *10th Intel EMEA Academic Forum*, (May 2005),
<http://download.intel.com/corporate/education/EMEA/academicforum/keynotes/Ronen>

(Beérkezett: 2006. június 3.)

SIMA DEZSŐ
BUDAPESTI MŰSZAKI FŐISKOLA
NEUMANN JÁNOS INFORMATIKAI KAR
1034 BUDAPEST, BÉCSI ÚT 96/B
Email: sima@bmf.hu

THE DAWN OF A NEW ERA IN PROCESSOR EVOLUTION

DEZSŐ SIMA

The birth of second generation superscalars heralded a new age in processor evolution, since these wide superscalars already utilized most of the instruction level parallelism available in general purpose applications. As a consequence, the previous, approx. 10-fold-per-decade increase of processor efficiency leveled off. Along the main road of evolution designers addressed this crucial challenge by aggressively raising clock frequencies by a nearly 100-fold-per decade rate in order to maintain an overall approx. 100-fold-per decade performance increase. However, such an aggressive boosting of clock frequencies inevitably triggered intricate design problems in the GHz range, leading to three basic limitations in increasing performance: core efficiency, dissipation and skew walls, all contributing to the leveling off in core frequencies witnessed during the last few years. On the other hand, however, available complexity could be raised further exponentially, in accordance with Moore's law, which paved the way to a new era of processor evolution, marked by recent power-aware multicore and multithreaded designs. Our paper focuses on the three performance walls mentioned above.

TARTÁLYMÉRETEZÉSI PROBLÉMÁK VIZSGÁLATÁNAK MATEMATIKAI HÁTTERE SZTOCHASZTIKUS MŰKÖDÉSI FELTÉTELEK ESETÉN

MIHÁLYKÓNÉ ORBÁN ÉVA, LAKATOS G. BÉLA ÉS MIHÁLYKÓ CSABA

Különböző termelési rendszerekben gyakori közbülső tárolók alkalmazása. Sztochasztikus működési feltételek esetén gyakran felmerülő probléma a tároló méretének adott megbízhatósági szint melletti meghatározása, illetve a szükséges kezdő anyagmennyiség megadása. Ebben a cikkben a gyakorlati feladat megoldásának matematikai aspektusaival, a megbízhatóságot megadó függvények elemzésével, az őket jellemző egyenletek analitikus és numerikus megoldásával, valamint a vizsgált függvények approximációjával foglalkozunk.

1. Bevezetés

A különböző műszaki rendszerek megvalósításánál gyakran alkalmazott eljárás közbülső tárolók használata. Könnyen elképzelhető ez egy vegyipari gyárnál, ahol egy tartályban gyűjtik a megtermelt anyagot, és ebből a tartályból veszik ki a felhasználás esetén. A gyűjtés oka lehet az eltérő ütemű termelés és felhasználás, de például okot adhat erre az is, hogy meghibásodások esetén is legyen felhasználható anyag a raktáron. A cél a tartály megfelelő méretének a meghatározása annak érdekében, hogy a tartályból ne csorduljon túl az anyag, valamint annak a kezdő anyagmennyiségnek a megadása, amelynek rendelkezésre kell állnia a kezdő időpillanatban annak érdekében, hogy a termelés ne akadjon el anyagihiány folytán.

Hasonló tárolóként működik egy biztosítótársaság pénztára, illetve szennyvíztisztításnál az ülepítő tartály is. Előbbi esetben a kérdés a megfelelő kezdő tőke meghatározása, utóbbinál pedig például a megfelelő tartályméret megadása mellett annak a kezdő vízszintnek a meghatározása is lehet feladat, amely mellett még a mikroorganizmusok megfelelő működése biztosítható. Ezekből a példákból látható, hogy az általunk felvetett problémák és kérdések más aspektusban is előfordulnak.

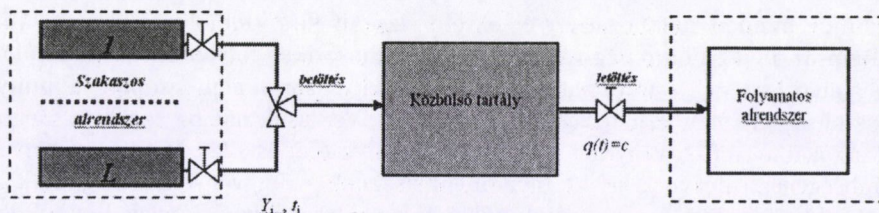
Ha a tároló probléma eredeti megfogalmazásához visszatérünk, akkor az anyagot termelő és tartályba töltő egységeket betöltő egységeknek, az anyagot a tartályból letöltő és azt felhasználó egységeket felhasználó egységeknek szokták nevezni. Mind a betöltő, mind a felhasználó egységek működése többféle lehet. Ipari rendszerek esetén megkülönböztetnek szakaszos, illetve folyamatos működésű egységeket. Más megközelítésben az egységek működése lehet determinisztikus, illetve

sztochasztikus. Szakaszos működésű betöltő és szakaszos működésű felhasználó alrendszerek közbülső tartállyal történő összekapcsolásának vizsgálatát tartalmazza determinisztikus működési feltételek esetén [4, 17]. Determinisztikus betöltések és felhasználások esetén véletlen meghibásodások feltételezésével dolgozott ki modellt Lee és Reklaitis [6, 7], valamint Odi és Karimi [9, 10], továbbá Orbán-Mihálykó és Lakatos [11]. Szakaszos betöltésű és folyamatos anyag felhasználású alrendszerek működésének modelljei szerepelnek a [12, 13] publikációkban. Jelen publikációban a szakaszos betöltésű és folyamatos letöltésű alrendszerek összekapcsolásával és főleg a feladat megoldása közben felmerült problémák matematikai aspektusai-val foglalkozunk.

2. A vizsgált modell: alapvető jelölések és feltételezések

A közbülső tartályba a megtermelt anyagot a betöltési alrendszert alkotó betöltési egységek töltik be. Ezek nem működnek állandóan. Az i -edik betöltés a tartályba a t_i időpillanatban történik. A betöltés ideje rövid, ezt elhanyagoljuk, azaz pillanatszerű betöltésekkel dolgozunk. Az egyes betöltések közt eltelt időt egymástól független, azonos eloszlású valószínűségi változóknak tekintjük, amelyek eloszlásfüggvénye $F(x)$, sűrűségfüggvénye $f(x)$. Jelölje μ_F a közös várható értéket és σ_F a közös szórást. Jelölje $N(t)$ a t ideig történő betöltések számát. Az i -edik betöltés esetén a tartályba betöltött anyagmennyiség szintén véletlen nagyságú, ezt a folytonos eloszlású Y_i valószínűségi változó adja meg. Az Y_i valószínűségi változóról feltételezzük, hogy nemnegatív értékűek, egymástól függetlenek, azonos eloszlásúak $G(y)$ eloszlásfüggvénnyel, $g(y)$ sűrűségfüggvénnyel, μ_G várható értékkel és σ_G szórással. Feltételezzük továbbá, hogy az $N(t)$ betöltési folyamat és Y_i egymástól függetlenek. A letöltési folyamatot folytonos műveletnek tekintjük állandó c intenzitással. Célunk a tartály megfelelő méretezése, azaz annak a tartályméretnek a megadása, amely elegendő ahhoz, hogy a tartályba beférjen a betöltő egységek által megtermelt anyag, valamint a kezdő anyagmennyiség megadása, azaz annak az anyagmennyiségnek a meghatározása, amelynek rendelkezésre kell állnia a $t = 0$ időpillanatban annak érdekében, hogy a tartályban mindig legyen a felhasználó egységek számára elegendő anyagmennyiség.

Az általunk vizsgált modell hasonló a Prékopa-Ziermann-modellhez [2], amelynek vizsgálata során az a kérdés, hogy mennyi az a minimális kezdő anyagmennyiség, amellyel a folyamatos működés biztosítható, ha a szállítmányok véletlen időpontokban érkeznek és véletlen vagy állandó anyagmennyiséget szállítanak. Modelünk és a Prékopa-Ziermann-modell közti alapvető különbség az, hogy jelen esetben nem meghatározott számú, hanem véletlen számú betöltés történik (szállítmány érkezik) a $[0, T]$ intervallumon, és a megoldási mód is különbözik az általuk kidolgozott megoldástól. A megfelelő tartályméret meghatározásának problémája pedig biztosítási problémákkal hozható kapcsolatba. Az ott alkalmazott eljárást használ-



1. ábra. A termelési rendszer sematikus vázlata

juk a megoldás során. A konkrét megfeleltetéseket és a felhasznált eredményeket a megfelelő helyeken részletezzük.

A szükséges kezdő anyagmennyiség és a szükséges tartályméret meghatározásához a közbülső tartályban levő anyag mennyiségének változását vizsgáljuk az időben.

A tartályban az anyagmennyiség-változás két dologból tevődik össze: a beáramló anyagmennyiségből és a tartályból letöltött anyagmennyiségből. Mivel a betöltött anyagmennyiséget a

$$\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

összeg adja meg, a letöltött anyagmennyiséget pedig a $h(t) = ct$ függvény, ezért a két függvény különbsége, vagyis

$$\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct$$

éppen a $t = 0$ időpontbeli tartályban levő anyagmennyiséghez viszonyított anyagmennyiség-változás. Ha ehhez a függvényhez hozzáadjuk a $t = 0$ időpontban a tartályban levő anyagmennyiséget, akkor a tartályban levő anyagmennyiséget leíró függvényhez jutunk. Jelöljük z_0 -al a kezdő anyagmennyiséget! Ahhoz, hogy soha ne fogyjon ki a tartályból az anyag, szükséges, hogy

$$z_0 + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct \geq 0 \quad (1)$$

egyenlőtlenség teljesüljön minden nemnegatív t értékre, vagy ha rögzített T ideig vizsgáljuk a folyamatot, akkor minden $0 \leq t \leq T$ esetén. Ahhoz, hogy a közbülső tartály mérete (z_1) elegendő legyen, szükséges, hogy

$$z_0 + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct \leq z_1 \quad (2)$$

teljesüljön minden nemnegatív t értékre a vizsgált $[0, T]$ időintervallumon. Mivel azonban az anyagmennyiség-változás egy sztochasztikus folyamat, ezért az (1) és (2) egyenlőségek a folyamat minden realizációja során nem, csupán valamilyen valószínűséggel (megbízhatósággal) teljesülnek. Vezessük hát be azokat a megbízhatóságokat leíró függvényeket, amelyek a tartálméret és a kezdő anyagmennyiség különbségének, illetve a kezdő anyagmennyiségnek a függvényében megadják annak a valószínűségét, hogy a tartályból nem fog túlsordulni az anyag, illetve, hogy mindig rendelkezésre áll elegendő anyag az anyagot felhasználó egységek számára! Definiáljuk az $R_1 : R^2 \rightarrow R$ függvényt az alábbi módon:

$$R_1(z, T) = P \left(\left\{ 0 \leq z - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i + ct, \quad \forall t : 0 \leq t \leq T \right\} \right), \quad (3)$$

azaz a z méretű tartályban az anyagmennyiség-változás T ideig nem haladja meg a tartály méretét (azaz a kezdő anyagmennyiséggel növelt tartálméret esetén nincsen már túlsordulás), valamint legyen $R_2 : R^2 \rightarrow R$ az alábbi módon definiálva:

$$R_2(z, T) = P \left(\left\{ 0 \leq z + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct, \quad \forall t : 0 \leq t \leq T \right\} \right) \quad (4)$$

ami annak a valószínűségét fejezi ki, hogy a $[0, T]$ időintervallumon nem fogy el az anyag a közbülső tartályból.

Megjegyezzük, hogy a (3) összefüggés a (2) átrendezéséből a $z = z_1 - z_0$ bevezetése után adódik. A tartálméretezési és a kezdő anyagmennyiség meghatározási problémát a véges időintervallumon vizsgáljuk. Rögzített T esetén az anyagmennyiség változáshoz szükséges hely megadását az $1 - \alpha$ megbízhatósági szinten az R_1 függvény inverzének meghatározása jelenti az $1 - \alpha$ helyen, a megfelelő kezdő anyagmennyiség az $1 - \alpha$ megbízhatósági szinten pedig az R_2 függvény inverzének értéke az $1 - \alpha$ helyen. A gyakorlati problémánál a szükséges tartálméret az $1 - 2\alpha$ megbízhatósági szinten nem nagyobb, mint az előbbi két érték összege.

3. A megbízhatóságot megadó függvények vizsgálata

A megbízhatóságot megadó (3) függvény a biztosítási matematikában felmerülő klasszikus tönkremenési probléma vizsgálatakor tanulmányozott függvény. Igaz, hogy a biztosítási probléma megoldása során a befolyt pénz növeli a tárolóban (pénztárban) levő anyagmennyiséget (pénzt), s ez lineáris függvénye az időnek, míg a kifizetések véletlen időpontban történnek és véletlen nagyságúak, mégis a pénztárban levő pénz mennyiségének változása, valamint a kezdő tőkemennyiség meghatározása átrendezés után egy az egyben megfelel az általunk megfelelő tartálméret meghatározásaként aposztrofált feladatnak. A kezdő anyagmennyiség

meghatározási probléma megfelelőjével azonban nem találkoztunk az irodalomban. A probléma megoldásának módjában a biztosítási matematikában járt utat próbáljuk követni: integrálegyenletet állítunk fel a (4)-ben bevezetett megbízhatóságot megadó függvényre, s próbáljuk megkeresni ennek analitikus vagy numerikus megoldását.

3.1. Integrálegyenletek a megbízhatóságot megadó függvényekre

Az általunk bevezetett $R_1(z, T)$ függvényre felírható integrálegyenlet megtalálható Thorin [18] cikkében, ezért ezzel az egyenlettel nem foglalkozunk. Jelen cikkünkben főleg az $R_2(z, T)$ függvénnyel és határértékének vizsgálatával foglalkozunk.

Az $R_2(z, T)$ függvényre igazak az alábbi állítások:

3.1. ÁLLÍTÁS.

- $R_2(z, T)$ rögzített T esetén monoton növekvő függvénye a z -nek és rögzített z esetén monoton fogyó függvénye T -nek.
- $R_2(z, T) = 0$, ha $z \leq 0$ vagy $T \leq 0$.
- Bárhogyan választjuk is a paramétereket, $R_2(z, T)$ bármely $z > 0$ és $T > 0$ esetén kielégíti az alábbi integrálegyenletet:

$$R_2(z, T) = \int_0^{\frac{z}{c}} \int_0^{\frac{z}{c}} R_2(z + y - c\tau, T - \tau) f(\tau) g(y) d\tau dy + (1 - F(T)) \cdot 1_{\{z \geq cT\}}, \quad (5)$$

ahol 1_A 1 értéket vesz fel, ha az indexben levő esemény bekövetkezik és 0 értéket, ha az esemény nem következik be.

- Bármely paraméterválasztás esetén rögzített T mellett, ha $z \rightarrow \infty$, akkor $R_2(z, T) \rightarrow 1$.

Bizonyítás. Az állítás a), b) és d) részei könnyen láthatók. A c) rész bizonyítására a teljes valószínűség tételét alkalmazhatjuk. Tekintsük az első betöltés időpontját, jelöljük ezt τ -val.

Ekkor három eset fordulhat elő.

- $\tau \geq T$. Amennyiben $z \geq cT$, akkor T időpontig

$$0 \leq z + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct, \quad t \in [0, T]$$

biztosan teljesül, mivel

$$\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i = 0 \quad t \in [0, T],$$

ha viszont $z < cT$, akkor biztosan

$$z + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct < 0 \quad \text{valamely } t \in [0, T] \text{-re.}$$

2. Ha $\tau < T$ és $z - c\tau < 0$, akkor $z + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct < 0$ valamely $t \in [0, \tau]$ -ra, tehát

$$P \left(0 \leq z + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct \quad \forall t \in [0, T] \right) = 0.$$

3. Ha $\tau < T$ és $z - c\tau \geq 0$, valamint az első betöltés mennyisége $Y_1 = y$ akkor az első betöltés időpontjában megújul a folyamat, hiszen felújítási folyamat az $N(t)$, vagyis a $T - \tau$ időintervallumon kell teljesülnie a

$$0 \leq z + y - c\tau + \sum_{i=2}^{N(t)} Y_i - ct$$

feltételnek. Ez utóbbinak a feltételes valószínűsége $R_2(z + y - c\tau, T - \tau)$. Alkalmazva a teljes valószínűség tételét az első betöltés időpontjára és a betöltött anyagmennyiség értékére, kapjuk a bizonyítandó integrálegyenletet. \square

Mivel a (5) egyenletet analitikusan nem tudjuk megoldani, fordítsuk figyelmünket arra a problémára, amely akkor vetődik fel, ha azt szeretnénk, hogy a tartályból az anyagmennyiség soha ne fogyjon ki. Mivel ez az előbbi $R_2(z, T)$ határértéke $T \rightarrow \infty$ esetén, ezért amennyiben ismernénk a határértéket, visszakövetkeztethetnénk nagy T értékek esetén az $R_2(z, T)$ -re is. Vezessük hát be az alábbi függvényt, amely a tartályban levő kezdő anyagmennyiség függvényében megadja annak a valószínűségét, hogy mindig áll rendelkezésre anyag a felhasználó számára. Legyen $R_2 : R \rightarrow R$

$$R_2(z) = P \left(\left\{ 0 \leq z + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct, \quad t \geq 0 \right\} \right). \quad (6)$$

A következő állítások igazak az R_2 függvényre:

3.2. ÁLLÍTÁS.

a) $R_2(z)$ monoton növény z -nek, $R_2(0) = 0$, továbbá minden nemnegatív z érték esetén $R_2(z)$ kielégíti az alábbi integrálegyenletet:

$$R_2(z) = \int_0^{\frac{z}{c}} \int_0^{\frac{z}{c}} R_2(z - c\tau + y) f(\tau) g(y) d\tau dy. \quad (7)$$

Negatív z esetén $R_2(z) = 0$.

- b) Ha $\frac{\mu_G}{c\mu_F} \leq 1$, akkor $R_2(z) = 0$ bármely valós z érték esetén. Ha $\frac{\mu_G}{c\mu_F} > 1$, akkor $\lim_{z \rightarrow \infty} R_2(z) = 1$.

Bizonyítás. Az a) rész bizonyítása hasonlóan történhet a 3.1. állításbeli bizonyításhoz azzal a megjegyzéssel, hogy az első betöltés időpontjára alkalmazva a teljes valószínűség tételét a folyamat megújul. A b) rész indoklásakor vegyük figyelembe, hogy a tartályban levő anyagmennyiségre igazak az alábbiak:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \left(\frac{z_0 + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct}{t} \right) = \frac{\mu_G}{\mu_F} - c,$$

továbbá

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D \left(z_0 + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct \right) = \infty.$$

Tehát ha $\frac{\mu_G}{c\mu_F} < 1$, akkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \left(z_0 + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct \right) = -\infty,$$

tehát a nagy számok törvénye szerint

$$z_0 + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct$$

értéke 1 valószínűséggel előbb-utóbb negatív lesz. Ha viszont $\frac{\mu_G}{c\mu_F} = 1$, akkor a Chung-Fuchs-tétel miatt [3] (mivel a szórás végtelenbe tart) 1 valószínűséggel bármilyen nagy, illetve kis értéket felvesz. Ha $\frac{\mu_G}{c\mu_F} > 1$, akkor

$$\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct \rightarrow \infty$$

1 valószínűséggel, emiatt $\lim_{z \rightarrow \infty} R_2(z) = 1$. □

Megjegyzés. Ha az $N(t)$ folyamat Poisson-folyamat $\lambda = \frac{1}{\mu_F}$ paraméterrel, akkor a (7) egyenlet az alábbi formában írható:

$$R_2(z) = \int_0^\infty \int_0^{\frac{z}{c}} R_2(z - c\tau + y) \lambda \cdot e^{-\lambda\tau} g(y) d\tau dy. \quad (8)$$

3.2. Poisson-folyamattal megadott betöltési folyamat esete

3.3. ÁLLÍTÁS. Legyen a betöltési folyamat Poisson-folyamat $\lambda = \frac{1}{\mu_F}$ paraméterrel. Ekkor a (8) egyenlet az alábbi integrálegenletté alakítható:

$$R_2(z) = \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} (R_2(z+y) - R_2(y))(1 - G(y))dy, \quad z > 0. \quad (9)$$

Bizonyítás. Helyettesítsük a $t = z - c\tau$ kifejezést a (8) formulába. Ekkor láthatjuk, hogy

$$R_2(z) = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} \int_0^z R_2(z+y) \lambda \cdot e^{-\lambda \frac{z}{c}} \cdot e^{\lambda \frac{t}{c}} dt dG(y).$$

Szorozzuk meg $e^{\lambda \frac{z}{c}}$ -vel az egyenlet mindkét oldalát, majd deriváljuk z szerint őket. A deriválás elvégezhető, mert $R_2(z)$ egy folytonos függvény integrálja, ezért deriválható. Deriválás után azt kapjuk, hogy

$$e^{\lambda \frac{z}{c}} \cdot \left(R_2'(z) + \frac{\lambda}{c} R_2(z) \right) = \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\lambda \frac{z}{c}} \cdot \int_0^{\infty} R_2(t+y) dG(y).$$

Egyszerűsítve $e^{\lambda \frac{z}{c}}$ -vel, majd integrálva mindkét oldalt 0-tól végtelenig, kapjuk, hogy

$$R_2(w) - R_2(0) = \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^w \left(\int_0^{\infty} R_2(z+y) dG(y) \right) dz - \int_0^w R_2(z) dz \right).$$

Cseréljük meg az integrálás sorrendjét és alkalmazzuk a $x = z + y$ helyettesítést, valamint integráljunk parciálisan! Ha bevezetjük a $B(w) = \int_0^w R_2(x) dx$ jelölést, akkor

$$\begin{aligned} R_2(w) - R_2(0) &= \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^{\infty} (B(w+y) - B(y)) dG(y) - B(w) \right) = \\ &= \frac{\lambda}{c} ([-(B(w+y) - B(y))(1 - G(y))]_0^{\infty}) + \\ &+ \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^{\infty} (R_2(w+y) - R_2(y)) (1 - G(y)) dy - B(w) \right). \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy

$$\lim_{y \rightarrow \infty} (B(w+y) - B(y)) \cdot (1 - G(y)) = 0 \text{ és } (B(w) - B(0)) \cdot (1 - G(0)) = B(w),$$

hiszen Y_i nemnegativitása miatt $G(0) = 0$, s ezért az összeg első tagjából a határok behelyettesítése után $\frac{\lambda}{c}B(w)$ marad, ami az összeg második tagjával összevonva eltűnik és a bizonyítandó állítást kapjuk. \square

Megjegyezzük, hogy a (9) egyenlet egy Fredholm-típusú integrálegyenlet. Nehezíti a numerikus megoldását az, hogy a felső határ nem véges, valamint az, hogy az egyenlet siettetett argumentumú, azaz a „jövő” ismerete is szükséges az aktuális érték kiszámításához.

A (9) integrálegyenlet megoldásának egyértelműségét nem sikerült bebizonyítani. A megoldhatóságról azonban állíthatjuk, hogy bármely (folytonos) $G(y)$ eloszlásfüggvénnyel rendelkező Y_i $i = 1, \dots$ betöltések esetén (9)-nek van exponenciális megoldása. Nevezetesen igaz az alábbi állítás:

3.4. ÁLLÍTÁS. Legyen

$$h(y) = \frac{\lambda}{c}(1 - G(y)), \quad y \geq 0$$

esetén. Ha a (9) egyenlet olyan megoldását keressük, amelynek határértéke ∞ -ben 1 és 0-beli értéke 0, akkor $\frac{\lambda\mu G}{c} > 1$ esetén az

$$R_2(z) = 1 - e^{-\nu z} \quad (10)$$

függvény megfelel e kívánalmaknak, amennyiben $\nu > 0$ teljesíti az alábbi egyenlőséget:

$$\int_0^{\infty} e^{-\nu y} h(y) dy = 1. \quad (11)$$

Állítjuk továbbá, hogy a (11) egyenletnek minden $G(y)$ folytonos eloszlásfüggvény esetén egyértelmű valós pozitív megoldása van.

Bizonyítás. Induljunk ki a (8) egyenletből, azaz az

$$R_2(z) = \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} (R_2(z+y) - R_2(y))(1 - G(y)) dy = \int_0^{\infty} (R_2(z+y) - R_2(y)) h(y) dy$$

összefüggésből. Az

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} R_2(z+y)(1 - G(y)) dy \leq \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} (1 - G(y)) dy = \frac{\lambda\mu G}{c},$$

és

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} R_2(y)(1 - G(y)) dy \leq \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} (1 - G(y)) dy = \frac{\lambda\mu G}{c}$$

egyenlőtlenségek, valamint $(R_2(z+y) - R_2(y))(1 - G(y))$ nemnegativitása biztosítja az improprius integrálok konvergenciáját, s így

$$\begin{aligned} R_2(z) &= \int_0^{\infty} (R_2(z+y) - R_2(y))h(y)dy = \\ &= \int_0^{\infty} R_2(z+y)h(y)dy - \int_0^{\infty} R_2(y)h(y)dy. \end{aligned} \quad (12)$$

Ebből is adódik, hogy $R_2(0) = \int_0^{\infty} R_2(0+y)h(y)dy - \int_0^{\infty} R_2(y)h(y)dy = 0$ lehet csak.

Képezzük (12) mindkét oldalának határértékét, és cseréljük meg az integrálás és a határértékképzés sorrendjét! Kapjuk, hogy

$$1 = \int_0^{\infty} h(y)dy - \int_0^{\infty} R_2(y)h(y)dy = \frac{\lambda\mu}{c} - \int_0^{\infty} R_2(y)h(y)dy,$$

azaz

$$\int_0^{\infty} R_2(y)h(y)dy = \frac{\lambda\mu_G}{c} - 1.$$

Keressük (12) megoldását $R_2(z) = c_1 - c_2 e^{-\nu z}$ alakban!

Mivel $R_2(0) = 0$, $c_1 = c_2$ lehet csak, valamint $\lim_{z \rightarrow \infty} R_2(z) = 1$ miatt ν pozitív és $c_1 = 1$. Itt jegyezzük meg, hogy komplex ν megoldásokkal azért sem kell foglalkoznunk, mert a trigonometrikus tagok miatt $R_2(z)$ monotonitása nem teljesülne. Vagyis $R_2(z) = 1 - e^{-\nu z}$, ahol $\nu > 0$. Helyettesítsük be ezt az alakot (12)-be, s azt nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\nu z} &= \int_0^{\infty} (1 - e^{-\nu(z+y)})h(y)dy - \int_0^{\infty} (1 - e^{-\nu y})h(y)dy = \\ &= \int_0^{\infty} (e^{-\nu y} - e^{-\nu(z+y)})h(y)dy = \\ &= -e^{-\nu z} \int_0^{\infty} e^{-\nu y}h(y)dy + \int_0^{\infty} e^{-\nu y}h(y)dy = \\ &= (1 - e^{-\nu z}) \cdot \int_0^{\infty} e^{-\nu y}h(y)dy \quad \forall z \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Legyen

$$\int_0^{\infty} e^{-\nu y} h(y) dy = D.$$

Mivel

$$\int_0^{\infty} e^{-\nu y} h(y) dy \leq \int_0^{\infty} h(y) dy = \frac{\lambda \mu}{c},$$

ezért D értéke biztosan véges.

Így (13) miatt $1 - e^{-\nu z} = (1 - e^{-\nu z})D$, valamint $1 - e^{-\nu z} \neq 0$ minden $z > 0$ esetén, tehát D értéke szükségképpen 1 lehet csak.

Meg kell még mutatnunk, hogy valóban létezik olyan $\nu > 0$ valós szám, amire

$$\int_0^{\infty} e^{-\nu y} h(y) dy = 1.$$

Definiáljuk a $C(\nu)$ függvényt nemnegatív ν értékek esetén az alábbi módon:

$$C(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-\nu y} h(y) dy.$$

A korábban elmondottak miatt C minden nemnegatív ν -re jól definiált. Látható, hogy $C(\nu)$ ν -nek szigorúan monoton fogyó, folytonos függvénye. Tudjuk, hogy $C(0) = \frac{\lambda \mu}{c} > 1$, valamint az is igaz, hogy $\lim_{\nu \rightarrow \infty} C(\nu) = 0$. Ez utóbbi abból látszik, hogy

$$0 \leq C(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-\nu y} h(y) dy \leq \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} e^{-\nu y} dy = \frac{\lambda}{c} \left(\frac{1}{\nu} \right) \rightarrow 0, \quad \text{ha } \nu \rightarrow \infty.$$

Következésképpen a Bolzano-féle közbülső érték tétel miatt C értéke valahol 1-gyel lesz azonos. A szigorú monotonitás azt is biztosítja, hogy csak egyszer veheti fel a C függvény az 1 értéket. \square

Megjegyzés. A $\int_0^{\infty} e^{-\nu y} h(y) dy$ függvény a $h(y)$ függvény Laplace-transzformáltja, amelyet ebben az esetben a valós számegyenesen, annak is nemnegatív részén értelmezzük. Azt a helyet kell megkeresnünk, amely helyen a Laplace-transzformált 1 értéket vesz fel. Ennek a helynek a meghatározása explicit módon általában nem lehetséges. A numerikus meghatározás lehetőségeire a későbbiekben térünk vissza. Becslésére azonban az alábbi állítás lehetőséget ad.

3.5. ÁLLÍTÁS.

- a) Legyen $\frac{\lambda\mu_G}{c} > 1$. Ha valamely α pozitív számra $1 - G(y) \leq e^{-\alpha y}$ minden $y \geq 0$ esetén, akkor az a $\nu > 0$ érték, amelyre $\int_0^\infty e^{-\nu y} h(y) dy = 1$ teljesül, legfeljebb $\frac{\lambda}{c} - \alpha$ lehet.
- b) Ha valamely β pozitív számra $1 - G(y) \geq e^{-\beta y}$ minden $y \geq 0$ esetén, akkor az a $\nu > 0$ érték, amelyre $\int_0^\infty e^{-\nu y} h(y) dy = 1$ teljesül, legalább $\frac{\lambda}{c} - \beta$.
- c) Ha $1 - G(y) = e^{-\delta y}$ minden $y \geq 0$ esetén, akkor az a $\nu > 0$ érték, amelyre $\int_0^\infty e^{-\nu y} h(y) dy = 1$ teljesül, éppen $\frac{\lambda}{c} - \delta$.

Bizonyítás.

$$a) \quad 1 = \int_0^\infty e^{-\nu y} h(y) dy \leq \int_0^\infty e^{-\nu y} \frac{\lambda}{c} e^{-\alpha y} dy = \frac{\lambda}{c(\nu + \alpha)}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk, hogy $\nu \leq \frac{\lambda}{c} - \alpha$.

$$b) \quad 1 = \int_0^\infty e^{-\nu y} g(y) dy \geq \int_0^\infty e^{-\nu y} \frac{\lambda}{c} e^{-\beta y} dy = \frac{\lambda}{c(\nu + \beta)}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk, hogy $\nu \geq \frac{\lambda}{c} - \beta$.

- c) Összekapcsolhatjuk az állítás 1. és 2. részét, mivel egyenlőség esetén mindkét irányú egyenlőtlenség fennáll. \square

3.6. ÁLLÍTÁS. Ha Y_i $i = 1, 2, \dots$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó μ_G várható értékkel, azaz $\lambda = \frac{1}{\mu_G}$ paraméterrel, akkor a (10) egyenletnek $\frac{\lambda\mu_G}{c} > 1$ esetben megoldása az alábbi függvény, amennyiben $z \geq 0$:

$$R_2(z) = 1 - e^{-\frac{\lambda\mu_G - c}{\mu_G c} z} \quad (14)$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző tétel 3. részét az $\frac{1}{\mu_G} = \delta$ választással, és azonnal kapjuk a kívánt állítást. \square

Megjegyezzük, hogy a $\int_0^\infty e^{-\nu y} h(y) dy = 1$ egyenletet expliciten is meg tudjuk oldani exponenciális eloszlású betöltések esetén. Sőt, magát a (8) egyenletet is meg tudjuk oldani exponenciális eloszlásfüggvény esetén, kihasználva az exponenciális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényének alakját. Ily módon (8) egy lineáris differenciálegyenletté alakítható, amelynek egyértelmű megoldása (14). Így exponenciális eloszlású betöltött anyagmennyiségek esetén (8) megoldásának egyértelműségét is állíthatjuk.

Mivel az eloszlásfüggvény explicit alakját az esetek egy részében nem ismerjük, ezért a (9) által megadott egyenletet megadjuk a valószínűségi változó sűrű-

ségfüggvényének segítségével is. A (11)-ben szereplő integrált parciális integrálás módszerével számoljuk ki, s kapjuk, hogy (11) az alábbi alakban is írható:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} e^{-\nu y} (1 - G(y)) dy = \\ &= \frac{\lambda}{c} \left[\frac{e^{-\nu y}}{-\nu} (1 - G(y)) \right]_0^{\infty} + \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\nu y}}{-\nu} g(y) dy = \\ &= \frac{\lambda}{c\nu} - \frac{\lambda}{c\nu} \int_0^{\infty} e^{-\nu y} g(y) dy \end{aligned}$$

amiből átrendezés után kapjuk, hogy

$$\int_0^{\infty} e^{-\nu y} g(y) dy = 1 - \frac{c\nu}{\lambda}.$$

Ez azt jelenti, hogy (9) megoldásának megadása érdekében azt a $\nu > 0$ értéket kell megtalálnunk, ahol Y_i sűrűségfüggvényének Laplace-transzformáltja éppen metszi az $1 - \frac{c}{\lambda}\nu$ egyenest.

Megjegyezzük, hogy Poisson-eloszlású betöltési folyamat mellett exponenciális eloszlású betöltött anyagmennyiség esetén a $\frac{\lambda\mu_G}{c} < 1$ esetben az

$$R_1(z) = P \left(\left\{ 0 \leq z - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i + ct \quad \forall t : 0 \leq t \right\} \right)$$

függvény is exponenciális függvény, nevezetesen

$$R_1(z) = 1 - \frac{\lambda\mu_G}{c} e^{-\left(\frac{c-\lambda\mu_G}{\mu_G c}\right)z}.$$

Az $R_1(z)$ -re vonatkozó integrálegyenlet megtalálható az [5] könyvben, ez az integrálegyenlet az említett esetben lineáris differenciálegyenletté alakítható, és egyértelműen megoldható.

3.3. Numerikus megoldások Poisson-folyamattal megadott betöltési folyamat esetén

A (9) egyenlet egy megoldásának meghatározása érdekében a (11) egyenletet kell megoldanunk. A (11) egyenlet megoldása során négy különböző esetet különböztetünk meg.

1. Amennyiben az Y_i valószínűségi változók eloszlásfüggvénye olyan, hogy az $\int_0^{\infty} e^{-\nu y} h(y) dy$ integrál explicit módon kiszámítható, és a (11) egyenlet megoldása zárt alakban megadható. Ez azt jelenti, hogy zárt alakban kifejezhető, hogy

$h(y)$ Laplace-transzformáltja hol vesz fel 1 értéket. Ilyen esetre példa az, ha Y_i ($i = 1, \dots$) $\frac{1}{\mu_G}$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor az integrálás elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$\int_0^{\infty} e^{-\nu y} h(y) dy = \frac{\lambda}{c} \frac{1}{\nu + \frac{1}{\mu}} = 1.$$

Ebből az összefüggésből ν értéke egyértelműen meghatározható, és megkapjuk azt a megoldást, amelyet (14)-ben már megadtunk.

2. Amennyiben az Y_i ($i = 1, \dots$) valószínűségi változók eloszlásfüggvénye olyan, hogy az $\int_0^{\infty} e^{-\nu y} h(y) dy$ integrál explicit módon kiszámítható, de a (11) egyenlet explicit módon nem oldható meg, azaz a $h(y)$ Laplace-transzformáltja explicit módon megadható, de csak numerikusan számítható ki, hogy hol vesz fel 1 értéket. Ilyen esetre példa, ha Y_i egyenletes eloszlású valószínűségi változó az $[a, b]$ intervallumon. Természetesen annak érdekében, hogy Y_i ($i = 1, \dots$) értékei nemnegatívok legyenek, és létezzen nemtriviális megoldása (9)-nek, szükséges, hogy $a \geq 0$, $b \geq 0$ valamint $\frac{\lambda(a+b)}{2c} > 1$ teljesüljenek. Ebben az esetben az integrálás elvégzése után az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\nu y} h(y) dy &= \frac{\lambda}{c} \int_0^a e^{-\nu y} dy + \frac{\lambda}{c} \int_a^b e^{-\nu y} \left(1 - \frac{y-a}{b-a}\right) dy = \\ &= \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\nu(b-a) + e^{-\nu b} - e^{-\nu a}}{\nu^2(b-a)}, \end{aligned}$$

vagyis (11) megoldása a

$$\frac{\lambda}{c} \frac{\nu(b-a) + e^{-\nu b} - e^{-\nu a}}{b-a} = \nu^2$$

egyenlet megoldását jelenti.

Mivel a

$$\frac{\lambda}{c} \frac{\nu(b-a) + e^{-\nu b} - e^{-\nu a}}{b-a} - \nu^2$$

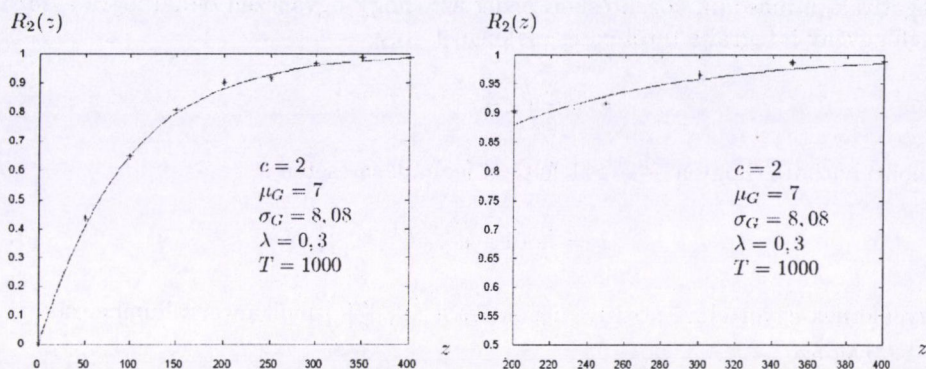
függvény esetén a függvény deriváltját ismerjük, ezért a gyökkereső eljárások közül a Newton módszer javasolható.

Mivel a gyök bizonyíthatóan a $(0, \frac{\lambda}{c})$ nyílt intervallumba esik, ezért a gyökkereső eljárás indítási pontját erről az intervallumról válasszuk.

Illusztrációként mutatjuk meg az alábbi példát. Az $a = 0$, $b = 14$ paraméterválasztással a várható érték $\frac{a+b}{2} = 7$, így $c = 2$ és $\lambda = 0,3$ esetén a

$$\frac{\lambda(a+b)}{2c} = 1,05 > 1$$

feltétel teljesül. A (11) egyenlet megoldására a Newton-módszer négy tizedesjegy pontossággal a $\nu = 0,0106$ értéket adta. Számítógéppel elvégeztük a folyamat Monte-Carlo-szimulációját, a szimulációból származó megbízhatóságokat összehasonlítottuk a numerikus megoldás segítségével kapott függvény értékeivel, és azt tapasztaltuk, hogy a kettő közti eltérés mindig a szimuláció hibáján belül volt. A Monte-Carlo-szimulációból származó értékek és az $R_2(z)$ függvény - az előbbi ν értékkel közelítve a kitevőt - láthatók a 2. ábrán.



2. ábra. A szimulációs eljárásból kapott megbízhatóságok (*), és a numerikus eljárás alapján kapott R_2 függvény a kezdő anyagmennyiség függvényében

3. Amennyiben az Y_i ($i = 1, \dots$) valószínűségi változók eloszlásfüggvénye olyan, hogy az $\int_0^\infty e^{-\nu y} h(y) dy$ integrál explicit módon pontosan nem számolható ki, de „kis elhanyagolással” igen. Ilyen esetre példa, ha Y_i ($i = 1, \dots$) normális eloszlású valószínűségi változó az $m > 0$ és $\sigma > 0$ paraméterekkel. Természetesen az nem biztosítható, hogy Y_i ($i = 1, \dots$) értéke biztosan pozitív legyen, de ha $m \geq 3\delta$, akkor Y_i értéke legalább 0,997 valószínűséggel, ha $m \geq 5\delta$, akkor Y_i ($i = 1, \dots$) értéke legalább 0,999994 valószínűséggel nemnegatív. Ilyen paraméterválasztás esetén parciálisan integrálva és kihasználva a normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvényének alakját kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\nu y} h(y) dy &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{-\nu y} (1 - G(y)) dy = \\ &= \left[\frac{\lambda}{c} \cdot \frac{e^{-\nu y} (1 - G(y))}{-\nu} \right]_0^\infty - \frac{\lambda}{c\nu} \int_0^\infty e^{-\nu y} g(y) dy \approx (\leq) \\ &\approx \frac{\lambda}{\nu c} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty e^{-\nu y} \cdot e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}} dy \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda}{\nu c} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\sigma^2}{2}\nu^2 - m\nu} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{(y-\nu-m)^2}{2\sigma^2}} dy \right) \approx \\
&\approx (\geq) \frac{\lambda}{c\nu} \left(1 - e^{-\frac{\sigma^2}{2}\nu^2 - m\nu} \right).
\end{aligned}$$

Az első közelítésnél azt használtuk fel, hogy megfelelő paraméterválasztásnál az eloszlásfüggvény értéke 0-ban csaknem 0, azaz a betöltött anyagmennyiségek nem-negatívak, a második közelítésben pedig azt, hogy ugyanezen oknál fogva a sűrűségfüggvény integrálja 0-tól ∞ -ig csaknem 1. Így

$$\nu \approx \frac{\lambda}{c} \left(1 - e^{-\frac{\sigma^2}{2}\nu^2 - m\nu} \right).$$

Bebizonyítható, hogy a $\frac{\lambda\mu_G}{c} > 1$ feltétel fennállása esetén a

$$\nu = \frac{\lambda}{c} \left(1 - e^{-\frac{\sigma^2}{2}\nu^2 - m\nu} \right) \quad (15)$$

egyenletnek egyértelmű pozitív megoldása a $\left(0, \frac{\mu_G}{2\sigma_G^2}\right)$ nyílt intervallumba esik.

Mivel az

$$f(\nu) = \nu - \frac{\lambda}{c} \left(1 - e^{-\frac{\sigma^2}{2}\nu^2 - m\nu} \right)$$

függvény deriváltját explicit módon ismerjük, ezért gyökkereső eljárásként ismét alkalmazhatjuk a Newton-módszert.

Példaként tekintsük a következő esetet! Legyen Y_i ($i = 1, \dots$) eloszlása normális eloszlás az $\mu_G = 10$ és $\sigma_G = 2$ paraméterekkel. Legyen $c = 2$, valamint legyen $\lambda = 0,3$. Ekkor a (15) egyenlet megoldása a Newton módszerrel $\nu = 0,0849$ -nek adódott. A szimulációból kapott eredményeket összevetve a numerikus eljárás segítségével kapott $1 - e^{-0,0849z}$ függvény értékeivel, azt tapasztaltuk, hogy az eltérés mindig a szimuláció hibáján belül van. A 3. ábra mutatja a függvényértékeket, a szimulációs értékeket, és a köztük levő eltéréseket.

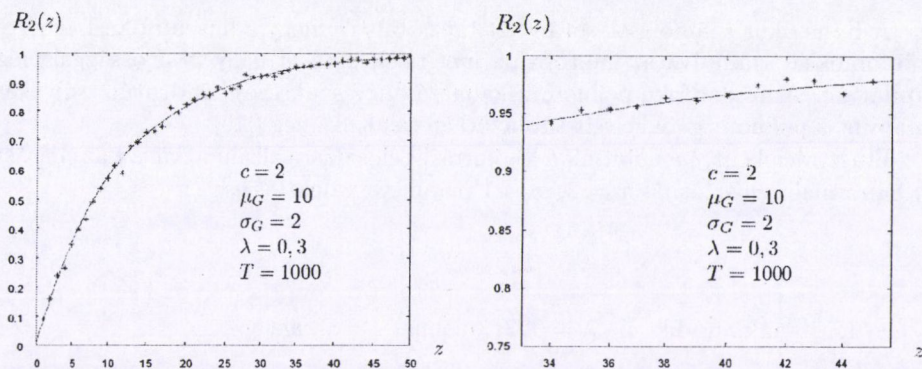
4. Amennyiben a Laplace-transzformálás csak numerikusan hajtható végre, akkor a

$$s(\nu) = \int_0^\infty e^{-\nu y} h(y) dy - 1 = 0$$

egyenlet megoldására a következő eljárás alkalmazható: A gyökkereső eljárás alkalmazása során (például a Newton-módszert alkalmazva), az $s(\nu)$ függvény és deriváltja értékei helyett azok közelítő értékeit használjuk. Ehhez szükségünk van az improprius integrál közelítő kiszámítására. Ehhez a következőképp jutunk:

Az $x = \nu y$ helyettesítés után $\frac{1}{\nu} h\left(\frac{x}{\nu}\right) = \tilde{h}(x)$ jelöléssel kapjuk, hogy

$$\int_0^\infty e^{-\nu y} h(y) dy = \int_0^\infty e^{-x} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot h\left(\frac{x}{\nu}\right) dx = \int_0^\infty e^{-x} \tilde{h}(x) dx,$$



3. ábra. A szimulációs eljárásból kapott megbízhatóságok (*), és a numerikus eljárás alapján kapott $R_2(z)$ függvény a kezdő anyagmennyiség függvényében

s a numerikus integrálás elvégzésére a Gauss-Laguerre kvadrátúra formula alkalmazható ([16]).

Az

$$s(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-\nu y} h(y) dy - 1$$

függvény deriváltja a Newton-módszerhez szintén kell, így meg kell (közelítőleg) azt is határozni.

A derivált a következő alakú:

$$s'(\nu) = - \int_0^{\infty} y e^{-\nu y} h(y) dy. \quad (16)$$

Az előbbi improprius integrál konvergens, mivel

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^{\infty} y e^{-\nu y} h(y) dy \leq \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} y (1 - G(y)) dy = \\ &= \frac{\lambda}{c} \left(\left[\frac{y^2 (1 - G(y))}{2} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{y^2}{2} g'(y) dy \right) = \frac{\lambda}{2c} M_2, \end{aligned}$$

amennyiben M_2 jelöli Y_i ($i = 1, \dots$) második momentumát.

(16) numerikus kiszámítására szintén alkalmazható a Gauss-Laguerre kvadrátúra formula a $\tilde{h}(x) = \frac{x}{\nu^2} h\left(\frac{x}{\nu}\right)$ függvénnyel. Így a Newton-módszer alkalmazásával (11) gyöke numerikusan megadható.

A numerikus számolások során azt tapasztaltuk, hogy a huszadfokú Laguerre-polinomokkal számolva az improprius integrálok értékét nagy pontossággal megkaphatjuk. A huszadfokú polinom alkalmazásához szükséges kvadratura súlyokat, valamint a polinom gyökhelyeit táblázatban találtuk meg ([16]).

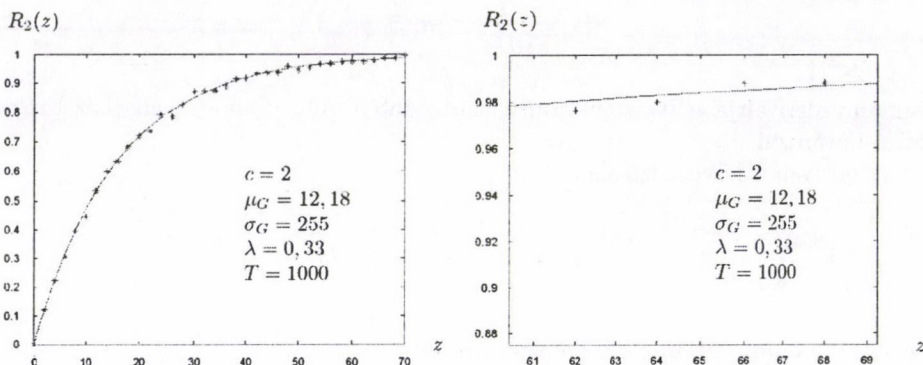
Illusztrációként, bemutatjuk a lognormális eloszlásra alkalmazva ezt az eljárást. A lognormális eloszlásnál $m = 2$, $\sigma = 1$ paraméterválasztás esetén

$$\mu_G = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}}$$

értéke 12,18-nak adódik. Ha $\lambda = 0,3$, valamint $c = 2$, akkor

$$\frac{\lambda \mu_G}{c} = 1,87 > 1.$$

Ezen paraméterek esetén (11) megoldása négy tizedesjegy pontossággal $\nu = 0,0634$, azaz $R_2(z) \approx 1 - e^{-0,0634z}$. A szimulációs értékek és a numerikus megoldás révén kapott függvény értékei közti eltérésekről azt tapasztaltuk, hogy a szimuláció hibáján belül vannak. A 4. ábra mutatja $N = 1000$ szimuláció esetén a szimulációs értékeket és a numerikus eljárás során kapott exponenciális függvényt.



4. ábra. A szimulációs eljárásból kapott megbízhatóságok (*), és a numerikus eljárás alapján kapott R_2 függvény a kezdő anyagmennyiség függvényében

3.4. Állandó nagyságú betöltések esete

Amennyiben a betöltött anyagmennyiségek nem véletlen, hanem állandó nagyságúak, és ezt az állandót tekintjük egységnyi mennyiségnek, akkor a 3. fejezet 3.2. állításához hasonlóan bizonyítható, hogy az

$$R_2^c(z) = P(\{0 \leq z + N(t) - ct, \quad \forall t \geq 0\})$$

megbízhatóságot megadó függvényre vonatkozó egyenlet az alábbi :

$$R_2^e(z) = \int_0^{z/c} R_2^e(z+1-c\tau) f(\tau) d\tau, \quad z \geq 0,$$

amely Poisson-folyamat esetén az alábbi egyenletbe megy át:

$$R_2^e(z) = \int_0^{z/c} R_2^e(z+1-c\tau) \lambda e^{-\lambda \cdot \tau} d\tau, \quad z \geq 0. \quad (17)$$

Ennek az integrálegyenletnek keressük a megoldását $\frac{\lambda}{c} > 1$ esetén az $R_2(0) = 0$ és $\lim_{z \rightarrow \infty} R_2(z) = 1$ peremfeltételek mellett.

3.7. ÁLLÍTÁS. Poisson-folyamattal megadott betöltési folyamat esetén $R_2^e(z)$ kielégíti az alábbi differenciálegyenletet, ha $z \geq 0$:

$$(R_2^e(z))' = \frac{\lambda}{c} (R_2^e(z+1) - R_2^e(z)) \quad (18)$$

az $R_2^e(0) = 0$ és a $\lim_{z \rightarrow \infty} R_2^e(z) = 1$ peremfeltételekkel.

Az egyenlőséget úgy értjük, hogy ha a 0 pontbeli derivált nem létezne, akkor $(R_2^e)'(0)$ értékén a derivált függvény 0 pontbeli jobb oldali határértékét értjük. A (18) egyenlet egy siettetett argumentumú differenciálegyenlet.

Bizonyítás. Induljunk ki a (17) integrálegyenletből és helyettesítsük a t helyébe a $t = z - c \cdot \tau + 1$ kifejezést, valamint szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $e^{\frac{\lambda}{c}z}$ -vel. Ekkor (17) az alábbi alakot ölti:

$$R_2^e(z) \cdot e^{\frac{\lambda}{c}z} = \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{\lambda}{c}} \cdot \int_1^{z+1} R_2^e(t) \cdot e^{\frac{\lambda}{c}t} dt.$$

Deriváljuk mindkét oldalt z szerint, s láthatjuk, hogy

$$\left((R_2^e(z))' + \frac{\lambda}{c} R_2^e(z) \right) \cdot e^{\frac{\lambda}{c}z} = \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{\lambda}{c}} R_2^e(z+1) \cdot e^{\frac{\lambda}{c}(z+1)}.$$

Most egyszerűsítsünk $e^{\frac{\lambda}{c}z}$ -vel és rendezzük az egyenletet, s megkapjuk a kívánt állítást. \square

Megjegyezzük, hogy sajnos az $(R_2^e(z))' = \frac{\lambda}{c} (R_2^e(z+1) - R_2^e(z))$ egyenlőség negatív z értékek esetén nem áll fenn, mivel, amennyiben fennállna, akkor $z < 0$ esetén a $R_2^e(z) = 0$ lenne. De ekkor a függvény deriváltja is azonosan 0 lenne. Ez viszont csak akkor igaz, ha $R_2^e(z+1) = 0$ állandó, vagyis az $R_2^e(z)$ függvény a $[0,1]$ intervallumon 0 értéket venne fel. Ezt folytatva azt kapjuk, hogy az $R_2^e(z)$ függvény minden intervallumon 0.

3.8. ÁLLÍTÁS. Amennyiben $\frac{\lambda}{c} > 1$, akkor a (18) differenciálegyenlet megoldása

$$R_2^c(z) = 1 - e^{-c_2 \cdot z} \quad z \geq 0,$$

amennyiben a c_2 valós szám kielégíti az alábbi feltételt:

$$\frac{\lambda \cdot e^{-c_2}}{c_2 \cdot c - \lambda} = -1. \quad (19)$$

Bizonyítás. A (18) differenciálegyenlet megoldásának egyértelműsége az $R_2^c(0) = 0$ és a $\lim_{z \rightarrow \infty} R_2^c(z) = 1$ peremfeltételek mellett a differenciálegyenletek elmélete alapján belátható [14]. Ami a megoldás alakját illeti, keressük (19) megoldását nemnegatív z esetén $R_2^c(z) = c_3 - c_1 e^{-c_2 z}$ alakban! Mivel az integrálegyenlet megoldása folytonos minden pontban, továbbá $\lim_{z \rightarrow \infty} R_2^c(z) = 1$, ezért $c_3 = 1$ és $c_2 > 0$, valamint mivel $R_2^c(0) = 0$, ezért $c_1 = 1$ lehet csak. Ha most már felhasználjuk, hogy $R_2^c(z)$ -t éppen $R_2^c(z) = 1 - e^{-c_2 z}$ alakban keressük, és ha ezt az alakot behelyettesítjük a (18) egyenletbe, akkor azt kapjuk, hogy a

$$c_2 e^{-c_2 z} = \frac{\lambda}{c} \left(-e^{-c_2(z+1)} - e^{-c_2 z} \right)$$

egyenlőség minden nemnegatív z érték esetén teljesül.

Ezt átalakítva és egyszerűsítve $e^{-c_2 z}$ -vel láthatjuk, hogy $c_2 c = \lambda(1 - e^{-c_2})$, azaz $c_2 c - \lambda = -\lambda e^{-c_2}$.

Ha a bal oldal 0, akkor az egyenlőség nem teljesülhet, ezért oszthatunk a bal oldallal és az osztás után pontosan a kívánt alakot kapjuk.

Nézzük meg, van-e valós megoldása a (19) egyenletnek!

Mivel a (19) egyenletből c_2 explicit módon nem fejezhető ki, ezért írjuk át (19)-t az alábbi alakba:

$$e^{-c_2} = 1 - c_2 \frac{c}{\lambda},$$

ezért a megoldás az $y = e^{-x}$ exponenciális függvény és a $y = 1 - \frac{c}{\lambda} x$ lineáris függvények metszéspontjának első koordinátája. A két függvény grafikonjának nyilvánvalóan metszéspontja a $(0,1)$ pont, ami azt jelenti, hogy a $c_2 = 0$ nyilván kielégíti a (19) egyenletet. Másrészt az $y = e^{-x}$ függvény $(0,1)$ pontbeli érintője az $y = 1 - x$ egyenlettel leírható egyenes, és mivel az $y = e^{-x}$ függvény szigorúan monoton fogyó konvex függvény, ezért ha egy $(0,1)$ ponton átmenő egyenes meredeksége kisebb -1 -nél, akkor újabb pontban metszi a görbét a pozitív félegyenesen, viszont ha az egyenes meredeksége legalább -1 és negatív, akkor újabb pontban már a pozitív félegyenesen nem metszheti az exponenciális görbét, csupán a negatív félegyenesen. Tehát a (19) egyenletnek akkor és csak akkor van pozitív megoldása, ha $-\frac{\lambda}{c} < -1$, vagyis ha $\frac{\lambda}{c} > 1$, s ez pontosan az a feltétel, ami mellett az integrálegyenlet megoldását kerestük. \square

Megjegyezzük, hogy a (19) egyenlet megoldására alkalmas a Newton-módszer. Mivel a gyök bizonyíthatóan a $(0, \frac{\lambda}{c})$ intervallumba esik, ezért a gyökkeresést cél-

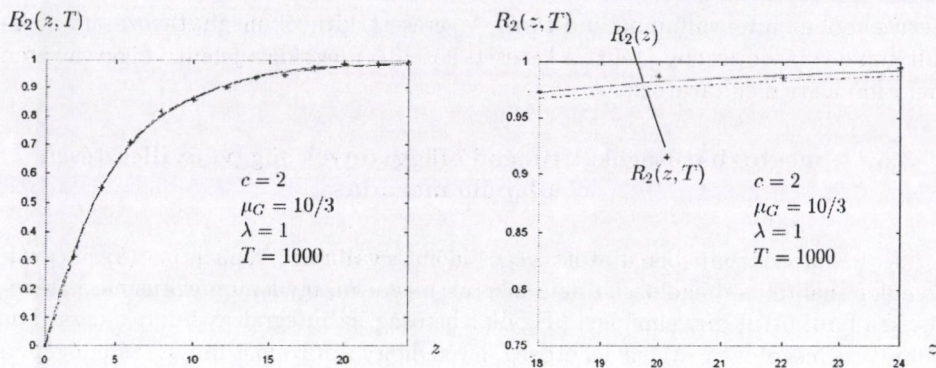
szerű ebből az intervallumból indítani. A keresett kitevők meghatározására használt gépidő másodpercnyi, tehát a keresett közelítő megoldást jelentő függvény igen rövid idő alatt meghatározható.

3.5. A megbízhatóságokat megadó függvények függvényillesztésen alapuló megadása

A 3.1. szakaszban bemutatott véges időintervallumra vonatkozó (5) integrálegyenlet analitikus megoldásait nem sikerült megadni, így a numerikus meghatározásokra fordítottuk figyelmünket. Egyik lehetőség az integrálegyenletek klasszikus numerikus megoldása. Másik lehetőség, lévén, hogy a folyamat maga számítógépen jól szimulálható, az integrálegyenletek numerikus módszerekkel történő megoldása helyett a megbízhatóságok Monte-Carlo-szimulációval való meghatározása bizonyos z értékek esetén, s ezekre a megbízhatósági értékekre eloszlásfüggvény illesztése. Mivel a Poisson-folyamattal leírt betöltési folyamat esetén az analitikus megoldások exponenciális típusú függvények voltak, azért Poisson-folyamat esetén exponenciális függvényt illesztettünk a szimulációs értékekre ([13]). A paraméterillesztéssel kapott megoldások nagy T értékek esetén jól közelítették az $R_2(z)$ függvényt. Olyan esetekben, amikor a végtelen intervallumra vonatkozó egyenletek pontos megoldását ismerjük, ezeket összehasonlítva a paraméterillesztésből származó megoldással jó egyezést kaptunk. Számos esetben, például nem Poisson-folyamattal leírt betöltési folyamat esetén, nem voltak azonban jók az illesztéssel kapott függvények. Ezekben az esetekben nem áll rendelkezésünkre információ az eloszlásfüggvény típusára vonatkozólag, a megoldás feltehetőleg nem exponenciális függvény, és a megoldást nem célszerű exponenciális függvénnyel közelíteni. Ezért a függvényillesztéshez olyan általános eloszlásfüggvény-családot kerestünk, amelynek tagjaival jól közelíthető az eloszlásfüggvények széles osztálya. Mivel ez a követelmény igaz a tangenshiperbolikus eloszláscsaládra ([1, 8, 15]), így a tangenshiperbolikus eloszlásfüggvény-családot választottuk az illesztéshez. Az illesztendő függvényeket rögzített T esetén $R_1^*(z, T) = th^{m_1}(b_1z + a_1)^{n_1}$, illetve $R_2^*(z, T) = th^{m_2}(b_2z)^{n_2}$ alakban kerestük, a paramétereket a legkisebb négyzetek módszerével határoztuk meg, és így minden esetben a szimulációs pontokra jól illeszkedő függvényeket kaptunk.

Illusztrációként mutatjuk az alábbi példát. Poisson betöltési folyamat esetén exponenciális eloszlású valószínűségi változókkal megadott betöltött anyagmennyiség mellett a paramétereket $c = 2$, $\lambda = 1$, $\mu_G = \frac{10}{3}$ értékűnek választva (14) alapján a pontos megoldás $R_2(z) = 1 - e^{0,2z}$. $T = 1000$ -ig $N = 1000$ -szer elvégeztük a folyamat Monte-Carlo-szimulációját, és megkerestük a szimulációs értékekre legjobban illeszkedő tangenshiperbolikus eloszlásfüggvényt. Négy tizedesjegyre kerekítve a kapott paramétereket $R_2^*(z, 1000) = th^{1,7802}(0,3738z)^{0,6341}$ adódott közelítő megoldásként. A két függvényt mutatjuk az 5. ábrán, a különbségük csak a jobb oldali nagyított változaton látható.

Megemlítjük, hogy a szimuláció végrehajtása, és a relatív gyakoriságok megkeresése az adott esetben 33 mp-et vett igénybe MatLab programcsomaggal írt szí-



5. ábra. A szimulációs eljárásból kapott megbízhatóságok (*), és a rájuk illesztett tangenshiperbolikus eloszlásfüggvény $R_2^*(z, T)$ (- -), valamint az $R_2(z)$ pontos megbízhatóság (—) a kezdő anyagmennyiség függvényében

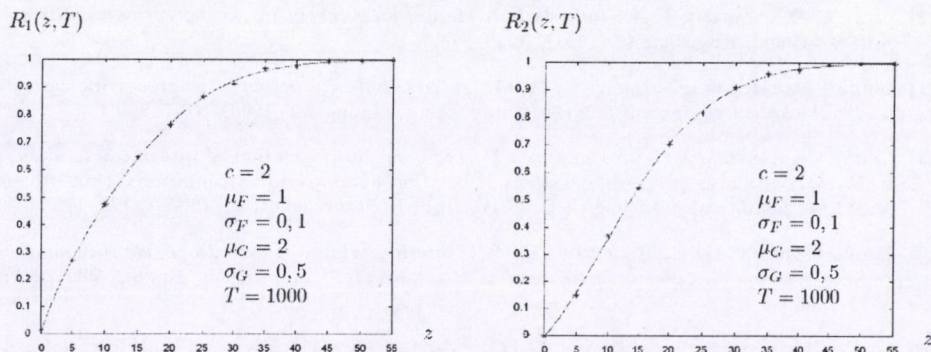
mulációs program segítségével INTEL PENTIUM(R) típusú CPU 180GHz 256MB RAM paraméterű személyi számítógépen.

Végezetül a 6. ábrán a paraméterek speciális választása esetén az $R_1(z, T)$, valamint $R_2(z, T)$ függvényre Monte-Carlo-szimuláció segítségével kapott értékeket, valamint a rájuk legjobban illeszkedő tangenshiperbolikus eloszlásfüggvényeket láthatjuk. Az ábrán látható példákban mind a betöltési időközöket, mind a betöltött anyagmennyiséget normális eloszlású valószínűségi változókkal adtuk meg. A paramétereket az ábrákon feltüntettük. A szimulációt minden esetben 1000-szer végeztük el.

Az előző fejezetben megadott numerikus módszerek előnye a tangenshiperbolikus eloszlásfüggvény illesztéssel szemben a gyorsabb végrehajthatóság mellett az is, hogy esetében a c , λ illetve egyéb paraméterektől való függés jobban látható, esetenként ezek szerinti deriváltja, gradiens vektora implicit módon meghatározható. Hátránya viszont, hogy csak Poisson betöltési folyamat mellett alkalmazható.

Végezetül a 6. ábrán a paraméterek speciális választása esetén az $R_1(z, T)$, valamint $R_2(z, T)$ függvényre Monte-Carlo-szimuláció segítségével kapott értékeket, valamint a rájuk legjobban illeszkedő tangenshiperbolikus eloszlásfüggvényeket láthatjuk. Az ábrán látható példákban mind a betöltési időközöket, mind a betöltött anyagmennyiséget normális eloszlású valószínűségi változókkal adtuk meg. A paramétereket az ábrákon feltüntettük. A szimulációt minden esetben 1000-szer végeztük el.

Rögzített T esetén az illesztéssel kapott közelítő függvények inverzét meghatároztuk. Az inverzekbe 0,99 megbízhatóságot behelyettesítve az R_1 függvény esetén a $z = 45,39$ értékeket kaptuk, vagyis ennyi helyet kell biztosítani a tartályban az anyagmennyiség változás számára annak érdekében, hogy 0,99 valószínűséggel ne történjen túlcsoordulás. Az R_2 függvény inverzébe behelyettesítve a 0,99 értéket



6. ábra. A szimulációs eljárásból kapott megbízhatóságok (*), és a rájuk illesztett tangenshiperbolikus eloszlásfüggvények a tartályméret, illetve a kezdő anyagmennyiség függvényében

pedig a $z = 45,24$ értéket kapjuk. A tartály mérete pedig $45,39 + 45,24 = 90,63$ anyagegység legyen, s ekkor $45,24$ egység kezdő anyagmennyiséggel indítva a folyamatot $0,98$ valószínűséggel sem anyagelfogyásból, sem túlsordulásból nem származik hiba $T = 1000$ -ig.

Hivatkozások

- [1] BLICKLE T., LAKATOS, B. G., MIHÁLYKÓ, CS., ULBERT, Zs.: *The hyperbolic tangent distribution family*. Powder Technology **97** (1998), 51–58.
- [2] CSÁTH, M. (SZERK.): *Operációkutatási esettanulmányok*. Budapest (1971).
- [3] CHUNG, K. L.: *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*. Springer Verlag (1967).
- [4] KARIMI, I. A. AND REKLAITIS, G. V.: *Intermediate storage in noncontinuous processes involving stages of parallel units*. AIChE Journal **31** (1985), 44–52.
- [5] KARLIN, S., TAYLOR, H. M.: *Sztochasztikus folyamatok*. Gondolat Kiadó, Budapest (1985).
- [6] LEE, E. S., REKLAITIS, G. V.: *Intermediate storage and operation of batch processes under equipment failure*. Comp. chem. Engng. **13** (1989), 491–498.
- [7] LEE, E. S., REKLAITIS, G. V.: *Intermediate storage and the operation of periodic processes under equipment failure*. Comp. chem. Engng. **13** (1989), 1235–1243.
- [8] MIHÁLYKÓ, CS., BLICKLE, T.: *On the approximation of the lognormal distribution*. Math. Gaz. **84** (2000), 308–311.
- [9] ODI, T. O., KARIMI, I. A.: *A general stochastic model for intermediate storage in non-continuous processes*. Chem. Eng. Sci. **45** (1990), 3533–3549.

- [10] ODI, T. O., KARIMI, I. A.: *Intermediate storage for noncontinuous process variability and failures*. Chem. Eng. Sci. **46** (1991), 3269–3282.
- [11] ORBÁN-MIHÁLYKÓ, É., LAKATOS, B. G.: *Intermediate storage in batch processing systems under stochastic equipment failures*. Comp. chem. Engng. **22** (1998), S797–800.
- [12] ORBÁN-MIHÁLYKÓ, É. AND LAKATOS, B. G.: *Modeling operation of intermediate storage in batch/continuous processing systems under stochastic operation conditions*. Proceedings of 4th Mathematical Modeling (Eds. I. Troch, F. Breiteneker), Bács (2003), 171–179.
- [13] ORBÁN-MIHÁLYKÓ, É., LAKATOS, B. G.: *Intermediate storage in batch/continuous processing systems under stochastic operation conditions*. Comp. chem. Engng. **28** (2004), 2493–2508.
- [14] ORBÁN-MIHÁLYKÓ, É., LAKATOS B. G.: *On the advanced integral and differential equations of sizing procedure of storage devices*. Functional Differential Equations, (2004), 121–131.
- [15] SÜLE Z., BLICKLE T., MIHÁLYKÓ Cs., BEZEGH, A.: *Eloszlások közelítése tangenshiperbolikus eloszlással*. MKN'05 konferencia kiadványa, (2005), 190–193.
- [16] STROUD, A. H., SECREST, D.: *Gaussian quadrature formulas*. Pentice-Hall, London (1966).
- [17] TAKAMATSU, T., HASHIMOTO, I. S., HASEBE, S.: *Optimal scheduling and minimum storage tank capacity in the process system with parallel batch type units*. Comp. chem. Eng. (1979), 185–192.
- [18] THORIN: *PROBABILITIES OF RUIN*. Scand. Actuarial J. (1982), 65–102.

(Beérkezett: 2006. június 22.)

MIHÁLYKÓNÉ ORBÁN ÉVA
PANNON EGYETEM
MATEMATIKAI ÉS SZÁMÍTÁSTECHNIKAI TANSZÉK
8200 VESZPRÉM, EGYETEM U. 10-12.
Email: orbane@almos.uni-pannon.hu

LAKATOS G. BÉLA
PANNON EGYETEM
FOLYAMATMÉRNÖKI TANSZÉK
8200 VESZPRÉM, EGYETEM U. 10-12.
Email: lakatos@fmt.uni-pannon.hu

MIHÁLYKÓ CSABA
PANNON EGYETEM
MATEMATIKAI ÉS SZÁMÍTÁSTECHNIKAI TANSZÉK
8200 VESZPRÉM, EGYETEM U. 10-12.
Email: mihalyko@almos.uni-pannon.hu

MATHEMATICAL BACKGROUND OF SIZING INTERMEDIATE STORAGE
UNDER STOCHASTIC OPERATIONAL CONDITIONS

ÉVA ORBÁN-MIHÁLYKÓ, BÉLA G. LAKATOS AND CSABA MIHÁLYKÓ

Intermediate storages are frequently used in chemical engineering. Under stochastic operation conditions determination of the appropriate size of the intermediate storage and the determination of the necessary initial amount of material are important questions. This paper is devoted to the mathematical aspects of the practical problem, to the analysis of the functions describing reliability, to the analytical and numerical solutions of the integral equations which are satisfied by the reliability functions and to their approximations.

FARKAS GYULA,
A KOLOZSVÁRI FERENC JÓZSEF TUDOMÁNYEGYETEM TANÁRA

GAAL GYÖRGY

A felsőoktatás kezdetei Kolozsvárt

Az első felsőbb fokú tanintézetet a 16. század végén Báthory István erdélyi fejedelem, akkoriban már lengyel király alapította Kolozsvárt¹. Erdély központi városa akkoriban a reformáció hatására teljesen protestáns, pontosabban unitáriussá vált. Báthory a katolicizmus megerősítésére 1579-ben jezsuita kollégiumot létesített a város közelében a kolozsmonostori egykori Benedek-rendi Apátság épületeiben. Egy év múlva a tanintézetet a város falain belülre, a Farkas utcai kolostor-épületbe költöztette, s 1581. május 12-én Vilnából keltezett alapítólevelet bocsátott ki számára. Ebben feljogosítja az akadémiát, hogy baccalaureusi, magiszteri és doktori fokozatra léptesse elő diákjait, s az előléptetés járjon éppen olyan jogokkal és megbecsüléssel, mint az a külföldi akadémiák végzettjeinél szokásos. Az akadémia fenntartására jelentős birtokokat, falvakat adományoz a jezsuitáknak. 1583-ban még egy 150 férőhelyes szeminárium (diákotthon) felállításáról is gondoskodik az uralkodó. Az intézet legszerencsésebb tanéveiben 20-25 tanár több mint 300 diákot oktatott a jezsuiták nemzetközi tanrendszere szerint. A jezsuiták térítései azonban felháborították a lakosságot, s 1603-ban, majd véglegesen 1605-ben kiűzték őket a városból, még épületeiket is összerombolták.

A második egyetemalapítási kísérlet Mária Terézia királynő nevéhez fűződik. Az 1690 óta a Habsburg-birodalomba bekebelezett Erdély protestáns felekezeti rendszerint nyugat-európai egyetemekre küldték fiataljaikat tanulni, s onnan gyakran veszélyes eszmékkal „megfertőzve” tértek vissza. A királynő szeretett volna egy olyan egyetemet létesíteni Nagyszombatban, majd Kolozsváron, ahol felekezeti különbség nélkül tanulhassanak a fiatalok. Mikor a pápa 1773-ban betiltotta a jezsuita rendet, épületeikben a királyné egy ilyen felsőfokú tanintézet létesítésére tett kísérletet. A protestáns felekezetek előjárói meglehetősen bizalmatlanul fogadták a kezdeményezést, de végül is a királynő 1774-ben felállította a jogtudományi, 1775-ben az orvosi kart két-két tanszékkal. A bölcsészeti és a teológiai kart 1776-ban a piaristák vezetésére bízta. A jogi kar az 1848-as forradalomig folytatta működését,

¹Az erdélyi felsőoktatás és a Ferenc József Tudományegyetem történetére vonatkozó összefoglaló művek: *A kolozsvári M. K. Ferenc-József Tudomány-Egyetem*. In: *A felső oktatásügy Magyarországon*. Budapest, 1896. (247-405.); MÁRKI SÁNDOR: *A M. Kir. Ferenc József Tudományegyetem története 1872-1922*. Szeged, 1922.; GAAL GYÖRGY: *Egyetem a Farkas utcában*. A kolozsvári Ferenc József Tudományegyetem előzményei, korszakai és vonzatai. Kolozsvár, 2001.

akkor feloszlott, s csak 1863-ban nyílt meg újra Királyi Jogakadémia elnevezéssel, magyar tannyelvvel. Az orvosi kar 1817-ben önállósult, s Orvos-sebész Tanintézetként működött 1872-ig. Bábákat és sebésmestereket képzett.

Az 1867-es kiegyezést és Erdély Magyarországgal való újbóli unióját követően a lényegesen megnagyobbodott országban szükségessé vált a fővárosin kívül egy második magyar egyetem felállítása. Eleinte Pozsony és Kolozsvár versengett befogadásáért. Több kedvező tényező is az utóbbi város mellett szólt. Itt már két egyetemi kar (jogi, orvosi) működött. Az unióval megszűnt Erdély minisztériuma, a Főkormányzók, s ennek kettős épülettömbje megürült. Tehát volt hol elhelyezni az egyetemet. A gróf Mikó Imre szervezőmunkája, erdélyi arisztokraták és értelmiségiek összefogásának eredményeként 1859-ben alapított Erdélyi Múzeum-Egyesület jelentős gyűjteményei és könyvtára az egyetemi oktatás segédeszközei lehettek.

Az egyetem alapításáról szóló törvényjavaslatot Eötvös József vallás- és közoktatásügyi miniszter 1870 májusában nyújtja be a parlamentbe, majd utóda, Pauler Tivadar átdolgozva újra beterjeszti. Minthogy tárgyalását egyre halogatják, a miniszter Ferenc József királytól kér és kap 1872. május 29-én előzetes engedélyt az egyetem felállítására. 1872 októberében a parlamenti jóváhagyó törvénycikelyek is megszületnek. Addigra már a négy kar (Jog- és államtudományi; Orvosi; Bölcsész-, nyelv- és történettudományi; Matematika-természettudományi) 42 tanszéke meg is hirdették a pályázatot. Több mint 120-an jelentkeztek, még sem sikerült minden tanszéket betölteni. Az ünnepélyes megnyitóra 1872. november 10-én, az első rektorbeiktatás alkalmával került sor. Újszerű volt a kolozsvári egyetemen a Matematika-természettudományi kar felállítása (ez csak a Pauler Tivadar-féle törvénytervezetben jelent meg). Ennek tárgyait a pesti egyetemen, s a német egyetemeken is a bölcsészeti karon tanították. Talán csak a tübingeni egyetemen volt külön természettudományi kara. E karon nyolc tanszéket hirdettek meg, de csak hetet tudtak megfelelő szakemberrel betölteni a megnyitásig: elemi matematika – Brassai Sámuel, felsőbb matematika – Martin Lajos, kísérleti természettan – Abt Antal; ásvány- és földtan – Koch Antal; vegytan – Fleischer Antal; növénytan – Kanitz Ágost; állattan – Entz Géza. A nyolcadik, matematikai (elméleti) természettan katedrára nem akadt megfelelő felkészültségű jelölt. A tanári kar legidősebb és legnagyobb tekintélyű tagját, a polihisztor Brassait rögtön rektorhelyettségévé választották. Ő akkoriban a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja volt, még Martin Lajost méltatta az akadémia levelező tagságra. Utóbb Entz, Koch és Kanitz is bekerült az akadémiai tagok sorába.

A matematikai és fizikai tanszékek

Az elméleti fizika tanszéket 1874-ben a német egyetemeken tanult Réthy Mórral töltik be². Tehetségére jellemző, hogy négy évvel később, 30 éves korában az akadémia levelező tagjává választja. A Bolyai-kutatásban is jeleskedik. Mikor

²Az egyetem tanárainak rövid életrajza megtalálható: *Százhuszonöt éve nyílt meg a kolozsvári tudományegyetem*. Emlékkönyv. I-II. köt. Pécs, 1997.

Brassai nyugdíjazásával megürül az elemi matematikai tanszék, Réthy erre helyezteteti át magát. Az 1884-ben újra meghirdetett elméleti fizika katedrát az egyetem 1873–1877 közötti tanítványa, 1881-ben habilitált magántanára, Vályi Gyula nyeri el rendkívüli tanári rangban. De Réthy már 1886-ban a fővárosi műegyetemre távozik, s Vályi – akárcsak elődje – átmege az elemi matematikai tanszékre. Úgyhogy az elméleti fizikára ismét pályázatot írnak ki: ezúttal sikerül megfelelő képzettségű tudóst, s az egyetemhez hű oktatót találni Farkas Gyula személyében. 1881-ben szerezte meg a budapesti egyetemen a magántanári címet. A kolozsvári tanszéket 1887. január 8-án rendkívüli tanárként foglalja el, 1888. március 23-án léptetik elő rendes tanárrá.

Akkoriban a karon még mindig csak nyolc tanszék működött, de nem egynek a betöltője már megváltozott. Az elemi matematikát Vályi Gyula tanította, jeles matematikus, akit főleg Bolyai Appendixének ismertetőjeként tartanak számon. 1891-ben lett az akadémia levelező tagja. A felsőbb matematikát még mindig Martin Lajos adta elő, 1897-ben bekövetkezett halála után a nemzetközi híré matematikus, Schlesinger Lajos magántanár kapta meg a tanszéket. Ő 1902-ben került az akadémikusok sorába. Nevéhez fűződik a matematikai tanszékek tudományos könyvtárának a felállítása. A kísérleti fizikát Abt Antal tanította a kezdetektől fogva: jeles tudós, jó szervező és kitűnő előadó volt. Fizikai Intézetet teremtett, melynek részére megszerezte a szükséges kísérleti eszközöket. Intézetét még halála (1902) előtt az új központi épület második emeletének 13 helyiségébe költöztette, sőt még az alagsorban is kapott néhány műhelyt. Iskolaalapítónak tekintik. Utóda Tangl Károly, Eötvös Loránd egykori asszisztense, a fővárosi egyetem magántanára. Szintén jó szervező, tudományos eredményeiért az akadémia is tagságra méltatta. E tanszék mellett a kezdetektől egy tanársegédi állást is rendszeresítettek. A századvégen Pfeiffer Péter töltötte ezt be, 1902-ben magántanári képesítést szerzett, s 1904-ben ő lett a harmadik, gyakorlati fizikai tanszék megalapítója.

Farkas Gyula kinevezésekor, az 1886/1887-es tanévben a Matematika-természettudományi karnak négy magántanárát tartották nyilván, közülük egy sem fizikus, a hat tanársegéd közül Pfeiffer segítette a fizika oktatását. A kar élén a dékán, Abt Antal állott, helyettese pedig Martin Lajos volt. Az akkori rendszer szerint a dékánt minden évben választották, s az illető a következő tanévben prodekániként szolgált. Minthogy e karon kevés tanár oktatott, egy-egy professzor elég gyakran került a dékáni székbe, nem ritkán újra is választották. A diáklétszám is igen csekély volt. A tanév 456 hallgatójából csak 30-an hallgatták az itteni előadásokat. A következő esztendőben, a növekvő összlétszám mellett is a legnépszerűbb szakoknak, a kémia és a kísérleti fizikának alig volt félszáznál több hallgatója, a legnehezebbnek tekintett elméleti fizikára pedig 12–15 hallgató iratkozott be.

Farkas Gyula egyetemi pályafutása

A Ferenc József Tudományegyetem évi három kötetben jelentette meg értesítőjét: Acta-Beszédek (Beszédek, kimutatások, dokumentumok); Almanach (az

egyetem vezető szervei, tanári kara, intézetei); Tanrend (előadások, szemináriumok karonként – félévi kiadvány)³. Ezekből kikerekedik Farkas Gyula egyetemi munkásságának pályája. Nyomon követhető, miként nő megbecsültsége, hírneve, kap egyre több elismerést és tisztséget, majd miként vonul vissza az egyetemi közélettől, s igyekszik minél több időt a tudományos munkára, valamint a tanításra fordítani.

Mikor 1887-ben Farkas elfoglalja kolozsvári tanszékét, csak rendkívüli tanári besorolást kap. Ez arra utal, hogy addigi tudományos munkássága még nem eléggé rangos, még bizonyítania kell. Máskülönbben ugyanaz a munkaköre, s ugyanazok a kötelességei, mint egy rendes tanárnak. Legfeljebb fizetése valamivel kisebb. A rendkívüli tanárokat rendszerint egy-két év próbaidő után rendes tanárrá léptették elő. Így történt ez Farkas esetében is. A tanszék elfoglalását követően a minisztérium két, a karral kapcsolatos intézetbe/bizottságba is kinevezte. Ezek a korabeli tanárképzést szolgálták. Az egyetem ugyanis a tudomány művelését tartotta céljának, s végzőseiből – legalább elvileg – tudósokat akart faragni. Ennek megfelelően a tanulmányok lezárásaként a doktori fokozatot nyújtotta. Azok a bölcsészkarai vagy matematika-természettudományi hallgatók, akik tanári oklevelet akartak szerezni, beiratkozhattak a Középiskolai Tanárképző Intézetbe, majd vizsgát kellett tenniük a Magyar Királyi Középtanodai Tanárvizsgáló Bizottság előtt. Ezeknek tanárai, illetve vizsgáztatói az egyetem tanári karából kerültek ki. Farkas egész egyetemi pályafutása alatt mindkét testületnek a tagja volt, 1898-tól 1908-ig a tanárvizsgáló bizottság alelnöki tisztségét is betöltötte. A fizika oktatásával kapcsolatos előadásokat csak pályája kezdetén tartott, utóbb rendszerint a kísérleti fizika tanára hirdetett ilyen órákat.

Az „Elméleti fizikai tanszék”-nek kolozsvári működése idején Farkas volt az egyetlen alkalmazottja: sem tanársegédet, sem adjunktust nem osztottak be mellé. Magántanárt⁴ is csak egyet képeztek e tárgykörből Fejér Lipót személyében. Megfigyelhető, hogy a tanszék nem annyira a kísérleti fizikai, mint inkább a két matematikai tanszékhez kapcsolódott. Farkas professzor rendszerint heti 7-9 órát hirdetett meg, közülük 2 szeminárium volt. Csak az 1901/1902-es tanévben létesült az egyetemen egy matematikai szeminárium, melynek három igazgatóját jelölik meg (Vályi, Farkas, Schlesinger), bár a tényleges irányítás Schlesingerre hárult. Tulajdonképpen egyetlen helyiségre utal a megnevezés: ide a három tanszék számára szükséges tudományos kiadványokat gyűjtötték össze. Ennek gondozásával 1903-tól egy negyedéves diákot (korrepetítort) bíztak meg, majd 1905-től a matematikus tanársegéd, Fejér Lipót dr. veszi át korrepetítorságot. Egy év múlva Fejér „az analí-

³Acta Reg. Scient. Universitatis Claudiopolitanae Francisco-Iosephinae Anni MDCCCLXXXVII–LXXXVIII. (1887–1918); A kolozsvári Ferencz-József Tudományegyetem Almanachja MDCCCLXXXVI–LXXXVII-ről. (1886–1916); A kolozsvári Ferencz-József Tudományegyetem Tanrendje az MDCCCLXXXVII–LXXXVIII. tanév I-ső felére. (1887–1915) 1888 és 1910 között az Almanach és a Tanrend összevont kötetben jelent meg.

⁴A német egyetemi rendszerben kialakult, s a magyar felsőoktatásba is átvett szabályoknak megfelelően a magántanári habilitáció két rendes tanárnak a jelölt addigi tudományos munkásságát mérlegelő ajánlására a kari tanács határozatával történt. A magántanárok nem voltak az egyetem alkalmazottai, de előadásokat hirdethettek tárgykörükből és vizsgáztathattak. A tanszékek betöltésénél a magántanári címmel rendelkezők előnyben voltak.

zis és analitikai mechanika” magántanára lesz, 1907-ben pedig adjunktussá léptetik elő. A szemináriumnak ettől fogva nincs külön gondnoka. Fejér 1911-ben elfoglalja a Schlesinger Lajos távozásával megürült felsőbb matematikai tanszéket, de alig pár hónap után ő is átpályázik a fővárosba.

Az egyetem belső rendjének megfelelően Farkas Gyulát is, mikor rangsorban rá került a sor, dékánná választották. Úgy tűnik, hogy igen pontos hivatalnok volt, aki lelkiismeretesen vezette kis karát. Ez lehetett az oka, hogy hét tanévben is viselte e tisztséget: 1889/90, 1892/93, 1893/94, 1896/97, 1897/98, 1898/99, 1902/03. Három alkalommal újraválasztották, mert bizonyára a kar egyik tanára sem vállalta el a megbízatást. Az újraválasztások, esetleges távozások, halálesetek miatt a dékán nem mindig kapta meg az elkövetkező évben a prodékáni tisztséget. Így Farkas is csak öt tanévben töltötte be ezt az inkább protokolláris megbízatást: 1890/91, 1894/95, 1899/900, 1901/02, 1903/04.

Dékánként Farkas Gyula több alkalommal képviselte karát, sőt egyetemét szakterületével kapcsolatos megemlékezéseken, ünnepségeken. 1892 decemberében a páduai egyetem Galileo Galilei „tanszékfoglalásának” háromszázadik évfordulóját ünnepelte. Ezen a kolozsvári egyetem Farkas dékánnal képviseltette magát⁵. A páduaiak tiszteletbeli doktori címmel tüntették ki a kolozsvári tudóst. 1897. június 24-én elhunyt Brassai Sámuel az egyetem nyugalmazott tanára, volt dékánja és rektora. Mint Erdély legnagyobb tudósát helyezték nyugalomra. Az egyetem képviselőjében Farkas Gyula mondott búcsúbeszédet a temetés alkalmával. Ugyanabban az évben július 6-án a Matematika természettudományi kar javaslatára tiszteletbeli doktorrá avatták József főherceget. Farkasra hárult a feladat, hogy beszéd kíséretében átnyújtsa az oklevelet. 1903. január 15-én az egyetem „emlékünnepet” rendezett Bolyai János születésének századik évfordulójára. Emléktáblát helyeztek a kolozsvári szülőház falára. A leleplezési beszédet mint dékán és a rendezőbizottság tagja, Farkas Gyula mondta. 1911 júliusában a Bolyaiak marosvásárhelyi újratemetésekor nem csak az egyetemet, hanem a Magyar Tudományos Akadémiát is ő képviselte. Különben Farkas tisztségein túl szakmailag is érdekelt volt a Bolyai-ünnepségeken: a Bolyai-féle algoritmusról tanulmányt írt 1881-ben.

Az egyetemi tanári pálya csúcsának a rektorrá választás számított. Farkas az 1907/908-as tanévben tölthette be ezt a tisztséget. Így egy évig ő lett az egyetemi tanács elnöke. Ez a testület a rektoron kívül a prorektorból, a négy-négy dékánból és dékán-helyettesből állt. Tanácsüléseken és ünnepi alkalmakkor a rektor elnökölt, beszédet mondott. A két legfontosabb beszéde tanév elején és végén hangzott el. A székfoglaló rendszerint általánosabb, a szakkal kapcsolatos kérdéseket érintett, a beszámoló viszont a tanév eseményeit vette számba. Végül a rektor az értesítő Acta-kötete részére sajtó alá rendezte beszédeit és a tanév dokumentumait. E kötetből megállapítható, hogy Farkas rektori évében semmilyen különösebb esemény sem történt.

⁵FARKAS GYULA: *A Galilei-ünnep Páduában*. Természettudományi Közlöny, XXV. köt. (1893) 196–201.

Székfoglaló beszédét 1907. szeptember 22-én mondotta el a tanévnyitó kerekében⁶. Ez a 30 oldalas értekezés az elméleti fizika fejlődését vázolja az utóbbi két évtizedben, vagyis Farkas tanszéki beiktatása óta. Rámutat, hogy tárgya „haladásának szakadatlan megfigyelése és egyetemi oktatásba való beillesztése, nyomában az egyetemi előadások ismételt szükségessé vált átdolgozása nem kis emberi erőnek is elég föladat lehetett, kivált, hogy gyakorta az egészen kész új eredményeknek és útjaiknak kielégítő értelmezése s értékelése is hosszas tanulmányozást követelt közzétételük módjának a különösségei vagy éppen fogyatékosságai miatt”. A legfontosabb eredmények számbavétele után kifejti nézeteit az egyetemi munkáról. Meglepőnek tartja azok magatartását, akik az egyetemi vizsgák letétele után „csak addigi szellemi tőkájükből szeretnének élni”. Így legfeljebb hamis sikereket érhetnek el. Az egyetem ugyanis felkészíti hallgatóját a „tudományok tanulmányozására és művelésére”. Egy életen át kell ezt a munkát folytatni, az értelmiséginek a „folytonos önképzés föladata”. De ezt nem lehet csak kötelességérzetből vagy a létfenntartásért művelni, gyönyöröztet kell benne találni. Egy másik ünnepi alkalomra, amikor a rektornak megnyitót kellett mondania, 1908. május 29-én került sor: az egyetem-alapítási évfordulón, amikor a diákok pályázati munkáit is kitüntették⁷. Ezúttal Farkas rámutat, hogy 35. alkalommal tartják ezt a már hagyományossá váló ünnepséget. Felsorolja azokat az alapítványokat és pénzalapokat, amelyek a jutalmazást lehetővé teszik.

A rektori beszámoló beszéd mindig a következő tanévnyitó előtt hangzott el, s utána a rektor átadta tisztségét utódának. Farkas 1908. szeptember 27-én számolt be a vezetése alatt lefolyt tanévről⁸. Logikusan felépített, 18 alcímre oszló 41 függeléssel ellátott, az egyetemi élet minden vonatkozását érintő beszédéből csak azt emeljük ki, hogy az első szemeszterben 47 rendes és 5 rendkívüli tanár valamint 43 magántanár összesen 2404 hallgatót oktatott. Az utóbbiakból csak 164-en tartoztak a Matematika-természettudományi karhoz. Az egyetem két új épülete befejezéséhez közeledett: az állattani intézeté a Mikó-kertben valamint az egyetemi könyvtár. Ezek felavatására a következő tanévben, 1909. május 18-19-én kerül sor, amikor Farkas az egyetem rektorhelyettese. Itt említjük meg, hogy 1898 és 1908 között az egyetem „állandó könyvtárbizottságának” is tagja volt.

Felmelegetik, hogy Farkas Gyula vonzotta Kolozsvárra a legjobb magyar ma-

⁶ Megjelent az Acta 1907–1908-as kötetében valamint különlenyomatként: *Beszéd, mellyel Farkas Gyula [...] a kolozsvári Magyar Királyi Ferencz József Tudományegyetem el[zi/dei] rektora az 1907/8. tanévet megnyitotta.* Kolozsvár, 1907. 33 l.

⁷ Acta 1907–1908. Fasciculus II. *Beszédek, amelyek a kolozsvári M. K. Ferencz József Tudományegyetem alapítása XXXVI. évfordulójának ünnepén 1908. május hó 29-én tartattak [...].* Kolozsvár, 1908.

⁸ Acta 1908–1909. Fasciculus I. *Beszédek, amelyek a kolozsvári M. K. Ferencz József Tudományegyetem 1908/09. tanévi rectora és tanácsa beiktatása és a tanév megnyitása alkalmából 1908. évi szeptember hó 27-én tartattak.* Kolozsvár, 1908. 1–144. (Rectori beszámoló beszéd. Mondotta [...] Farkas Gyula mint az egyetem kormányáról lelépő 1907/8. tanévi rector 1–22. + Mellékletek 22–144.)

tematikusokat, s így közvetve szerepe van ezek iskolába tömörülésének⁹. Tény, hogy Farkas nem egy reál tanszék betöltésekor kari referensként felkutatta, levélben is pályázásra biztatta kora legjobbnak vélt szakembereit. Így kollegái voltak Schlesinger Lajos, Fejér Lipót, Haar Alfréd, Riesz Frigyes – a világhírű magyar matematikai iskola megalapítói. Közös matematikai szemináriumuk lehetett ezen iskola szülőtalaja. S az is figyelemre méltó, hogy mindnyájan a palermói Circolo Matematico tagjai voltak.

Akkoriban az egyetemi tanárok rendszerint 70 éves korukban vonultak nyugdíjba. Farkas Gyula súlyos szembetegsége, a glaukóma miatt úgy érezte, hogy egyre kevésbé tud eleget tenni a tanári munkának, s ezért már 68 évesen kérte nyugalmazását. Utolsó tanéve jó részét betegszabadságon töltötte, Tangl és Haar professzorok helyettesítették. A nyugdíjazási határozat 1915. október 23-i keltezésével érkezett meg. Úgyhogy az 1915/16-os tanév rektora, Tangl Károly emlékezett meg róla beszámoló beszédében: „Az első félévben vonult nyugalomba dr. Farkas Gyula, a matematikai fizikának egyetemünkön 28 év óta tanára. Nehezen váltunk meg egyetemünk régi kedves tagjától, ki hosszú tanári működése alatt megszerezte szeretetünket és nagyrabecsülésünket. Előadásai mindenkor a precizitás és világosság mintaképei lesznek. Mesterien értett hozzá, hogy a legkényesebb probléma szövevényes szerkezetét áttekinthetővé tegye; került minden felesleges szót úgy, hogy előadásai a tömörségnek és hajszálnyi pontosságnak klasszikus példái. Vizsgálatai a mechanikából és elektrodinamikából értékes eredményeivel egyetemünk büszkeségei maradnak. Nagyra becsültük benne mély igazságosságát, mely minden tettében megnyilvánult, ami munkásságát egyetemi ügyek intézésében annyira becsessé tette. Egyetemünktől megvált, de vigasztaljon bennünket az a tudat, hogy a magyar tudományosságának megmaradt, adja Isten, minél hosszabb időre”¹⁰. Farkast nyugalomba vonulása alkalmából az uralkodó a Ferenc József-rend középkeresztjével tüntette ki.

Az oktató és előadó

Az egyetem hivatalos, félévenként kinyomtatott tanrendjeiből ismerjük a Farkas Gyula meghirdette előadások címét. Ezekből egy fizikus bizonyára következtetéseket vonhat le érdeklődési körének alakulásáról. Tőle függött, hogy melyik félévben milyen címmel hány óra előadást és szemináriumot hirdetett meg. Akkoriban az egyetemi tanárok heti óraszámja 7–10 között mozgott. Az első tanévekben rendszerint két kurzust (3+2 óra), egy szemináriumot (2 óra), s időnként egy általánosabb témájú, valamennyi diák számára kiírt ingyenes előadást („publikum” – 1 óra) tartott. Az 1890-es évektől minden félévre kiírt egy-egy 5 órás alapkurzust:

⁹GÁBOS ZOLTÁN: „A természet a matematika nyelvén szól hozzánk”. Természet Világa, 128. évf. (1997) 290–293.; PRÉKOPA ANDRÁS: *Farkas Gyula élete és munkásságának jelentősége az optimalizálás elméletében*. In: Farkas Gyula élete és munkássága. Szerkesztette: Martinás Katalin. Budapest, 2003. 9–26. Az utóbbi helyen Farkas levelezéséből vett idézetek is alátámasztják az állítást.

¹⁰Acta 1916–1917. Fasciculus I. 19. l.

hétköznapiakon délben tartotta az órát. Továbbá egy kétórás gyakorlatot: ezeket szerdán délutánra tette. Egyik-másik szemeszterben pedig kezdőknek is hirdetett 2-3 órás bevezető előadást. Ezeket is déli órákra tette. A régi jezsuita épületben óráit a X. számú tanteremben tartotta. Az újonnan emelt központi épületnek a második emeleten lévő II. matematikai tantermét (Király utcai szárny, szemben a főlépcsővel) jelölték ki számára. Itt már egy új órabeosztást alakított ki. Két kurzust hirdetett meg, egy 4 órás a haladottabbaknak, egy 3 órás a kezdőknek, továbbá egy 2 órás szemináriumot. A leggyakrabban visszatérő kurzuscímek: Erőtan, Vektor-tan, Mechanika alaptanai.

Kitűnő tanítványa és tanszéki örököse, Ortway Rudolf a Magyar Tudományos Akadémia 1932. decemberi ülésén elhangzott emlékbeszédében így jellemzi Farkas kurzusait: „Külön ki kell emelni Farkas Gyula egyetemi előadásait, melyeket gondos kidolgozásban litografálva közrebocsájtott. Előadásai az egész elméleti fizikára kiterjednek, de beosztásuk a szokottól nagymértékben eltér. A főszó az alapfogalmak pontos és általános kifejezésén van. Csak oly jelenségeket von tárgyalása körébe, melyek ily értelemben vett rendszeres tárgyalásra mégegértek. Fogalmazásuk igen gondos és tömör, nem lehet egy szót elvenni, mely fölösleges volna. Ezért nem képeznek könnyű olvasmányt és alig alkalmasak egy kezdő hallgató bevezetésére a tudományba, de ki már érettebb ésszel veszi ezeket kezébe, és ki a szigorúság és általánosság követelményeire, valamint egy nagy diszciplína egységes, logikus felépítésére súlyt helyez, sok tanulságot meríthet, és sok élvezetet találhat bennük. De épp ezek a sajátságok valamint a szemléletesség hiánya érthetővé teszik, hogy szélesebb körökben nem váltak népszerűekké”¹¹.

Ortway Rudolf emlékbeszéde függelékében közli Farkas Gyula bibliográfiáját, s ebben egy nyomtatott és öt sokszorosított egyetemi jegyzetet sorol fel. Gábos Zoltán professzor már tizenegy címet említ¹², néhánynak két-három kiadását is jelzi. Nem utal rá, hol találta adataikat, de kitűnik, hogy nem látta valamennyit. E jegyzékeket összevetettük a kolozsvári két nagy könyvtárban (egyetemi, akadémiai), valamint a Matematikai Kar (az egykori Matematikai Szeminárium) könyvtárában található kötetekkel és az értesítők (Acta) bibliográfiai részében felsorolt címekkel. Az 1891/92-es Acta-kötet három nyomatos kurzust említ, cím nélkül. Gábos az 1889-1891 közötti időszakból négy címet sorol fel, egyik sem található a könyvtárakban. Egyetlen nyomtatott kurzusa az Erdélyi Múzeum-Egyesület szakosztályi értesítőjének különlenyomat-sorozatából kerekedett ki: *Vector-tan és az egyszerű inaequatiók tana* (Kolozsvár, [1901] 165 l.). Az 1907/8-as Actában jelzi Farkas, hogy három féléves előadása „tanulói jegyzeteit könyomás alá igazította”: *A mechanika alaptanai* (hiányzik a könyvtárakból); *Az energia átalakulásai* (Kiadja Thomay János, Somogyi István. 1906/7. I. félév. 114 l.); *Az energia terjedése* (Kiadja Bendessy György. Leírta Nagy Imre. 1906/7. II. félév 227 l.). Az 1908/9-es Acta két újabb címet sorol fel: *Különös mechanika* – tényleges címe: *Analytikus*

¹¹ *Farkas Gyula rendes tag emlékezete.* Írta Ortway Rudolf [levelező] tag. Felolvasta a Magyar Tudományos Akadémiának 1932. évi december hó 19-én tartott összes ülésén. Budapest, 1933. 31-32.

¹² Vö. Gábos Zoltán: i.m.

mechanika (Kolozsvárt, 1907/8. I. félév. Kiadja a Tanárjelöltek segélyegylete. [Leírta:] Csízhegyi L. 143 l.); *Erőtan* (hiányzik). Végül az 1914/15-re megjelent Acta-kötetben hat kurzuscímet találunk, utalással az ív-terjedelemre is: *Vektor-tan* - 24 ív (hiányzik); *A Mekanika Alaptanai* - 27 ív (1913/14. II. félév, 192 l.); *Analytikus mechanika* - 27 ív (1913-14. I. félév 214 l.); *Erőtan* - 38 ív (1913-14. II. félév 308 l.); *Az energia átalakulásai* - 33 ív (1912-13. I. félév 267 l.); *Az energia terjedése* - 29 ív (hiányzik). Összegezve megállapíthatjuk, hogy Farkas mindegyik kurzusának legalább egy kiadása megtalálható könyvtárainkban.

Aránylag keveset tudunk Farkas Gyula hallgatóiról, tanítványairól. Kevesen jelentkeztek előadásaira, szinte kizárólag matematikus és fizikus hallgatók. Csak levéltári kutatással lehet majd összeállítani mindazok jegyzékét, akik nála vizsgát tettek. Az Acta-kötetek azok nevét őrizték meg, akik tárgyából pályadíjas dolgozatot írtak. A professzorok minden évben kidolgozandó témákat jelöltek meg, a hallgatók tetszésük szerint egyik-másikat tanulmányban tárgyalták, s azt jelíges boríték kíséretében benyújtották a karhoz. Csak a díjnyertesek borítékjait bontották fel, hogy az eredeti nevet megismerjék. A május 29-én, az egyetemalapítási évfordulón tartott ünnepségen közölték a nyertesek névsorát. 1888-1890 között két alkalommal is Szabó Péter volt a díjazott, utóbb Farkasnál is doktorált. Budapesten lett tanár, a Bolyai-kutatásban jeleskedett. 1893-1895 között két tanévben Kacsóh Pográc nyer a tárgyból díjat, ő is e témában szerez doktorátust 1896-ban. Nem fizikusként, hanem dalművek szerzőjeként vált híressé. 1895/96-ban Korbuly Emil és Nagy Sándor nyer díjat Farkas véleményezése nyomán. A következő tanévben Kaufmann György a díjnyertes dolgozat szerzője. Hosszú szünet után 1910/11-ben a kísérleti fizika tétel kidolgozásáért, de Farkas véleményezése alapján is Gyulai Zoltán nyer díjat, ő rövidesen Tangl professzor asszisztense lesz, majd az egyetem tanára. 1911-13 között egy román fiatal, Lupan Vazul (Vasile Lupan) lesz ismételtelen az elméleti fizika tétel díjazott kidolgozója.

Utóbb szegődött Farkas Gyula mellé tanítványul Ortway Rudolf, aki az egyetem elvégzése után a kísérleti fizika-tanszéken Tangl Károly mellett tanársegédként dolgozott (1909-1912), utána németországi tanulmányokat folytatott, majd 1915-ben

bizonyára Farkas Gyula javaslata alapján - megkapta a magántanári minősítést elméleti fizikából. Úgyhogy Farkas nyugalomba vonulását követően sikerrel pályázhatott a katedrára: 1916. augusztus 16-án rendkívüli tanárrá nevezték ki. Farkas Gyula akkor már Budapesten lakott¹³.

¹³Farkas Gyula igen gyakran változtatta lakását, mint az az értesítőkből is kitűnik: 1887 Felsőszén u. 27., 1888 Belközép u. 9., 1890 Belső u. 13., 1891 - Főtér 13, II. emelet, 1894 - Belközép u. 22., 1896 Külmagyar u. 7., 1900 - Főtér 26., 1902 - Szentegyház u. 23., 1904 - Karolina tér 3., 1905 - Sétatér u. 4. I. emelet, 1906 - Szentegyház u. 36., 1908 - Szentegyház u. 31. II. emelet. Budapesti címe: I. Enyedi u. 11.

Függelék
Farkas Gyula egyetemi előadásai tanévenként

1887/88 – I.

Az erőfüggvények elmélete (potenciál elmélet) és alkalmazása. Heti 3 ó.

A mechanika elemei. Heti 2 ó.

*Tanárképző gyakorlatok. Heti 2 ó.

1887/88 – II.

A potenciál elmélet alkalmazása. Heti 3 ó.

Mechanika elemei. Heti 2 ó.

*A fizika abszolút mértékei. (Publicum.) Heti 1 ó.

Tanárképző gyakorlatok. Heti 2 ó.

1888/9 – I.

Energetika (A hő, elektromosság és vegyfolyamatok mechanikai elmélete)
 Heti 5 ó.

*Az előadásokkal kapcsolatos gyakorlatok. Heti 2 ó.

1888/9 – II.

Az energia terjedési tüneteinek elmélete (Rugalmassági tünemények,
 a hang-, fényterjedés, hővezetés, elektromos áramok, elektromos és
 mágneses indukció elmélete). Heti 5 ó.

Az előadásokkal kapcsolatos gyakorlatok. Heti 2 ó.

1889/90 – I.

Analitikus mechanika. Heti 5 ó.

*Általános függvénytan az alkalmazásban előforduló nevezetesebb függ-
 vényalakok ismertetésével. Heti 2 ó.

*Az előadásokkal kapcsolatos gyakorlatok. Heti 2 ó.

1889/90 – II.

Potenciális elmélet és alkalmazásai. Heti 5 ó.

*Az előadásokkal kapcsolatos gyakorlatok. Heti 2 ó.

1890/91 – I.

Energetika. Heti 5 ó.

*Az előadásokkal kapcsolatos gyakorlatok. Heti 2 óra.

1890/91 – II.

Az energia terjedési tüneteinek elmélete. Heti 5 ó.

*A fény elektromágneses elmélete. (Publicum.) Heti 1 ó.

*Az előadásokkal kapcsolatos gyakorlatok. Heti 2 ó.

1891/92 – I.

Analitikus mechanika. Heti 5 ó.

*Az előadásokkal kapcsolatos gyakorlatok. Heti 2 ó.

1891/92 II.

Potenciális elmélet és alkalmazásai. Heti 5 ó.

*Az előadásokkal kapcsolatos gyakorlatok. Heti 2 ó.

1892/93 – I.

Energetika. Heti 5 ó.

*A hőterjedés elmélete. (Publicum.) Heti 1 ó.

*Az előadásokkal kapcsolatos gyakorlatok. Heti 2 ó.

1892/93 – II.

Az energia terjedési tünetényei. Heti 5 ó.

Az analitikus mechanika alaptanai (kezdőknek). Heti 2 ó.

*Az előadással kapcsolatos gyakorlatok. Heti 2 ó.

1893/94 – I.

Analitikus mechanika. Heti 5 ó.

*Az előadással kapcsolatos gyakorlatok. Heti 2 ó.

1893/94 – II.

Erőfüggvények. Heti 5 ó.

Fizikai mérőeszközök elmélete. (Publicum.) Heti 1 ó.

*Az előadásokkal kapcsolatos gyakorlatok. Heti 2 ó.

1894/95 I.

Energetika. Heti 5 ó.

*Az előadásokkal kapcsolatos gyakorlatok. Heti 2 ó.

1894/95 II.

Az energia terjedési tünetényei. Heti 5 ó.

Mechanika kezdőknek. Heti 2 ó.

*Az előadásokkal kapcsolatos gyakorlatok. Heti 2 ó.

1895/96 – I.

Mozgástan. Heti 5 ó.

Matematikai bevezetés az elméleti fizikába. Heti 3 ó.

Mozgástani gyakorlatok. Heti 2 ó.

1895/96 – II.

Erőtan. Heti 5 ó.

A mennyiség-tani természet-tan művelése hazánkban. (Publicum) Heti 1 ó.

*Erőtani gyakorlatok. Heti 2 ó.

1896/97 – I.

Az energia alakváltozásai. Heti 5 ó.

Matematikai bevezetés az elméleti fizikába. Heti 3 ó.

*Energetikai gyakorlatok. Heti 2 ó.

1896/97 – II.

Energia terjedési tünetényei. Heti 5 ó.

Matematikai bevezetés az elméleti fizikába. Heti 3 ó.

*Elméleti fizikai gyakorlatok. Heti 2 ó.

1897/98 – I.

Általános mozgástan. Heti 5 ó.

Matematikai bevezetés az elméleti fizikába. Heti 3 ó.

*Mozgástani gyakorlatok. Heti 2 ó.

1897/98 II.

Erőtan. Heti 5 ó.

*Erőtani gyakorlatok. Heti 2 ó.

1898/99 I.

Az energia átalakulásai. Heti 4 ó.

Vektor-tan. (Matematikai bevezetés az elméleti fizikába) Heti 3 ó.

*Energetikai gyakorlatok. Heti 2 ó.

1898/99 II.

Az energia terjedése. Heti 4 ó.

Az analitikus mechanika alaptanai. Heti 3 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1899/1900 – I.

A mechanikai alapelvek némely alkalmazásai. Heti 4 ó.

Vektor-tan. Heti 3 ó.

*Mennyiségtani fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1899/1900 – II.

Erőtan. Heti 4 óra.

A mechanika alaptanai. Heti 3 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. (Tárgy: erőtan.) Heti 2 ó.

1900/1901 – I.

Az energia átalakulásai. Heti 4 ó.

Vektor-tan. Heti 3 ó.

Mennyiségtani fizikai szeminárium. (Tárgy: energetika.) Heti 2 ó.

1900/1901 – II.

Az energia kérdése. Heti 4 ó.

Az elméleti mechanika alaptanai. Heti 3 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1901/1902 – I.

Különös mechanika. Heti 4 ó.

Vektor-tan. Heti 3 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1901/1902 II.

Erőtan. Heti 4 ó.

A mechanika alaptanai. Heti 3 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1902/1903 – I.

Vektor-tan. Heti 3 ó.

Az energia átalakulásai. Heti 4 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1902/1903 II.

Az energia terjedése. Heti 4 ó.

A mechanika alaptanai. Heti 3 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1903/1904 – I.

Különös mechanika. Heti 4 ó.

Vektor-tan. Heti 3 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1903/1904 II.

Erőtan. Heti 4 ó.

Az analitikus mechanika alaptanai. Heti 3 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1904/1905 – I.

Vektor-tan. Heti 3 ó.

Az energia átalakulásai. Heti 4 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1904/1905 – II.

Az energia terjedése. Heti 4 ó.

A mechanika alaptanai. Heti 3. ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1905/1906 – I.

Különös mechanika. Heti 4 ó.

Vektor-tan. Heti 3 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1905/1906 II.

Erőtan. Heti 4 ó.

Az analitikus mechanika alaptanai. Heti 3 ó.

*Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1906/1907 – I.

Vektor-tan. Heti 3 ó.

Az energia átalakulásai. Heti 4 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1906/1907 – II.

Az energia terjedése. Heti 4 ó.

A mechanika alaptanai. Heti 3 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1907/1908 – I.

Analitikus mechanika. Heti 4 ó.

Vektor-tan. Heti 3 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1907/1908 II.

Erőtan. Heti 4 ó.

Mechanika alaptanai. Heti 3 ó.

*Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1908/1909 – I.

Vektor-tan. Heti 3 ó.

Az energia átalakulásai. Heti 4 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1908/1909 II.

Az energia terjedése. Heti 4 ó.

Mechanika alaptanai. Heti 3 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1909/1910 – I.

Analitikus mechanika. Heti 4 ó.

Vektor-tan. Heti 3 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1909/1910 – II.

Erőtan. Heti 4 ó.

Mechanika alaptanai. Heti 3. ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1910/11 I.

Vektor-tan. Heti 3 ó.

Az energia átalakulásai. Heti 4 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1910/11 – II.

Az energia terjedése. Heti 4 ó.

Mechanika alaptanai. Heti 3 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1911/12 – I.

Analitikus mechanika. Heti 4 ó.

Vektor-tan. Heti 3 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1911/12 - II.

Erőtan. Heti 4 ó.

Mechanika alaptanai. Heti 3 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1912/13 - I.

Vektor-tan. Heti 3 ó.

Az energia átalakulásai. Heti 4 ó.

*Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1912/13 - II.

Az energia terjedése. Heti 4 ó.

Mechanika alaptanai. Heti 3 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1913/14 - I.

Analitikus mechanika. Heti 4 ó.

Vektor-tan. Heti 3 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1913/14 - II.

Erőtan. Heti 4 ó.

A mechanika alaptanai. Heti 3 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1914/15 - I.

Vektor-tan. Heti 3 ó.

Energia átalakulásai. Heti 3 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

1914/15 - II.

Mechanika. Heti 3 ó.

Optika. Heti 3 ó.

Matematikai fizikai szeminárium. Heti 2 ó.

* Ingyenes előadás/szeminárium

DR. GAAL GYÖRGY

400015 CLUJ-NAPOCA (KOLOZSVÁR)

STR. REPUBLICII 43.

ROMÁNIA

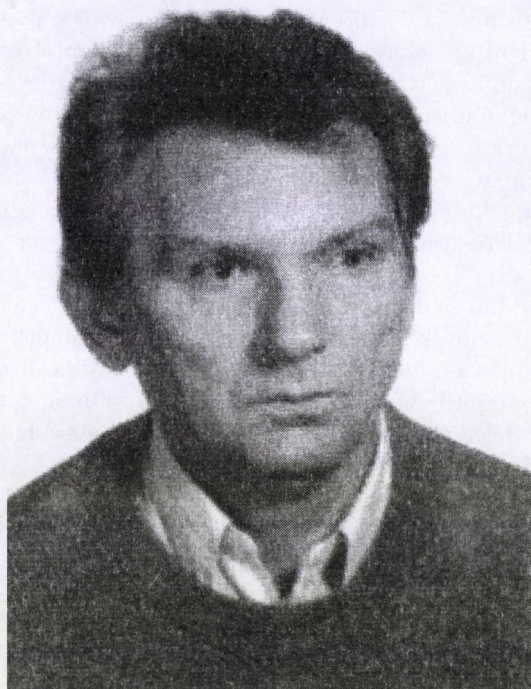
TEL. 0040/264/595991

GYULA FARKAS AS PROFESSOR OF THE FRANZ JOSEPH UNIVERSITY
FROM CLUJ/KOLOZSVÁR

GYÖRGY GAAL

This study in its first chapter presents the short history of higher education in Cluj/Kolozsvár (Romania). The first attempt to found a university dates back to 1581. Only the third foundation of that from 1872 created a long-lasting institute. This is the Franz Joseph University, which had four faculties, one being that of Mathematical-Natural Sciences. The beginnings of this Faculty and its professors of Mathematics and Physics are presented in the second chapter. One of the most outstanding professors was Gyula Farkas who taught Theoretical Physics between 1887-1915. His activity as member of the teaching staff is described in the third chapter. It is mentioned his role as a dean and as rector of the university. Most of the dates are taken from the year-books of the university. The last chapter characterizes Gyula Farkas as a lecturer and educator, gives a list of his multiplied courses, enumerates his best students. In the Appendix the title of all the courses held by professor Farkas at Cluj/Kolozsvár university are to be found.

DR. IMREH BALÁZS EMLÉKÉRE



Habár tudtuk, hogy súlyos betegséggel küzd, mégis mélyen megrendített bennünket a hír, hogy kollégánk, dr. Imreh Balázs egyetemi docens elhunyt. Nehéz dolog olyan ember életéről írni, aki annyi hasznosat és jót tett, mint ő. 1969-ben került az egyetem Számítástudományi Tanszékére. Ettől kezdve, egész pályafutása során magas színvonalon művelte az egyetemi oktatók örök kettős feladatát, az oktatást és a kutatást. Az oktatói ranglétra fokain járva 1984-ben jutott el az egyetemi docensi címig.

Az Operációkutatás és a Kombinatorikus optimalizálás oktatója volt, a hallgatók szívesen látogatták az óráit. Mindig partnernek tekintve őket, precízen és következetesen oktatott és vizsgáztatott. Nem véletlen, hogy sok hallgató választotta őt témavezetőjének diplomamunkája készítéséhez, és végzésük után is sokan az ő nevét kérdezik, amikor évfolyamtalálkozókon az egyetemről esik szó. Kutatási területein is jelentős eredményeket ért el. Számos cikke, eredménye közül itt csak kedvenceit, a véges automaták izomorfán teljes rendszereire vonatkozó tételeit említjük meg. Eredményei hazai és nemzetközi elismerést váltottak ki, többek között

tagja volt a Neumann János Számítógéptudományi Társaság Választmányának, titkára az MTA Informatikai Bizottságának és alelnöke a Bolyai János Matematikai Társaság Matematikai Alkalmazásai Szakosztályának. Az Alkalmazott Matematikai Lapok szerkesztője volt.

1994-től 2002-ig a Számítástudományi Tanszék, majd 2002-től, az Informatikai Tanszékcsoportnál történt átalakulások óta, az Alkalmazott Informatika Tanszék vezetője volt. 1990-ben, az önálló Informatikai Tanszékcsoport megalakulásakor vállalta a tanszékcsoport-vezető felelősségteljes, embert próbáló megbízatását is. Ebben a tisztségében ismerték meg őt a legtöbben és bizonyosodtak meg arról, hogy valóban talpig ember. Különösen a kezdetekkor, a hőskorban volt nehéz dolga. Ennek ellenére a feladatát fáradhatatlanul, gyakran önmagát sem kímélve, de mindannyiunk meglegedésére és maradéktalanul látta el. Szervezte, építgette az Egyetem informatika oktatását, kereste a hazai és nemzetközi együttműködési lehetőségeket más felsőoktatási intézményekkel. Eközben, nemcsak a közvetlen kollegái körében, hanem a Természettudományi kar oktatói között és a társegyetemen is ismertté tette hatalmas munkabírása, szervezőkészsége, amelyek ugyanakkor nagyfokú kompromisszum-készséggel és néha már hihetetlennek tűnő szerénységgel párosultak. Így ismertük, szerettük és tiszteltük őt. Miközben az Egyetem időegységei, a szemeszterek múltak egymás után, Balázst mindig ugyanaz vezérelte: elsőik között lenni a munkában, és szerényen a háttérben maradni azon, jóval ritkább alkalmakkor, amikor dicséretre, elismerésre került sor.

És egyszer csak jött a megdöbbentő hír. Szinte ki sem mertük mondani, hátha nem is igaz, hogy Balázs súlyos beteg, de sajnos igaz volt. Megváltozott helyzetét méltósággal viselve, tovább dolgozott, ameddig tudott, amíg az egyenlőtlen küzdelemben alul nem maradt.

Halálával pótolhatatlan veszteség érte az SZTE Informatikai Tanszékcsoportját, a hazai informatikusok közösségét. Itt most a tudományos közleményei jegyzékével emékezzünk rá. Emlékét kegyelettel megőrizzük.

Az SZTE Informatikai Tanszékcsoportjának vezetősége

Imreh Balázs tudományos közleményei

Tankönyv, jegyzet:

- [1] IMREH, B.: *Operációkutatás*, JATEPress, 1997.
- [2] IMREH, B.: *Bevezetés az operációkutatásba*, JATE ÁJTK, 1998.
- [3] IMREH, B.: *Kombinatorikus Optimalizálás*, NOVODAT, Győr, 1999.
- [4] BAJALINOV E., IMREH, B.: *Operációkutatás*, POLYGON, Szeged, 2001.
- [5] IMREH, B., IMREH CS.: *Kombinatorikus Optimalizálás*, NOVODAT, Győr, 2005.

Cikkek tudományos folyóiratokban:

- [6] IMREH, B.: *On a theorem of G. Birkhoff*. Publicationes Mathematicae **15** (1968), 147–148.
- [7] IMREH, B.: *On α_i -products of automata*. Acta Cybernetica **3** (1978), 301–307.
- [8] IMREH, B.: *On isomorphic representations of commutative automata with respect to α_i -products*. Acta Cybernetica **5** (1980), 21–32.
- [9] GÉCSEG, F., B. IMREH: *A note on the periodic sum of finite automata*. Foundations of Control Engineering, **5** (1980), 229–231.
- [10] ÉSIK, Z., B. IMREH: *Remarks on finite commutative automata*. Acta Cybernetica **5** (1981), 143–146.
- [11] ÉSIK, Z., B. IMREH: *Subdirectly irreducible commutative automata*. Acta Cybernetica **5** (1981), 251–260.
- [12] IMREH, B.: *On finite nilpotent automata*. Acta Cybernetica **5** (1981), 281–293.
- [13] IMREH, B.: *On products of automata*. Papers on Automata Theory IV, K. Marx Univ. of Economics, Dept. of Math., Budapest, 1982, No. DM 82-1, 1–15.
- [14] DÖMÖSI, P., B. IMREH: *On ν_i -products of finite automata*. Acta Cybernetica **6** (1983), 149–162.
- [15] GALAMBOS, G., B. IMREH: *Egydimenziós szabási feladatok megoldása oszlopgenerálással*. Alkalmazott Matematikai Lapok **10** (1984), 73–85.
- [16] IMREH, B.: *On finite definite automata*. Acta Cybernetica **7** (1984), 61–65.
- [17] IMREH, B.: *A note on commutative involutorial automata*. Papers on Automata and Languages VI, K. Marx Univ. of Economics, Dept. of Math., Budapest, (1984), No. DM 84-3, 1–5.
- [18] GÉCSEG, F., B. IMREH: *On α_i -products of tree automata*. Acta Cybernetica **8** (1987), 135–141.
- [19] GÉCSEG, F., B. IMREH: *On metric equivalence of ν_i -products*. Acta Cybernetica **8** (1987), 129–134.
- [20] GÉCSEG, F., B. IMREH: *A comparison of α_i -products and ν_i -products*. Foundations of Control Eng. **12** (1987), 1–9.
- [21] IMREH, B.: *A note on the ν_1 -product*. Acta Cybernetica **8** (1988), 242–252.
- [22] CSIRIK, J., B. IMREH: *On the worst-case performance of the NkF bin-packing heuristic*. Acta Cybernetica **9** (1988), 89–105.
- [23] GÉCSEG, F., B. IMREH: *On star-product of automata*. Acta Cybernetica **9** (1989), 43–46.

- [24] GÉCSEG, F., B. IMREH: *Finite isomorphically complete systems*. Discrete Applied Mathematics **36** (1992), 307–311.
- [25] IMREH, B.: *On a special composition of tree automata*. Acta Cybernetica **10** (1992), 237–242.
- [26] GÉCSEG, F., B. IMREH: *On finite isomorphically complete systems of tree automata*. Acta Sci. Math. **57** (1993), 497–502.
- [27] IMREH, B., M. ITO: *A note on the regular strongly shuffle-closed languages*. Acta Cybernetica **11** (1994), 257–260.
- [28] GÉCSEG, F., B. IMREH: *On completeness of nondeterministic automata*. Acta Math. Hungar. **68** (1995), 151–159.
- [29] GÉCSEG, F., B. IMREH: *On the cube-product of nondeterministic automata*. Acta Sci. Math. (Szeged) **60** (1995), 321–327.
- [30] DUDÁS T., I. BARTALOS, B. IMREH: *On a tour construction heuristic for the asymmetric TSP*. Acta Cybernetica **12** (1995), 209–216.
- [31] IMREH, B.: *On isomorphic representation of nondeterministic tree automata*. Acta Cybernetica **12** (1995), 11–22.
- [32] IMREH, B., M. STEINBY: *Some Remarks on Directable Automata*. Acta Cybernetica **12** (1995), 23–36.
- [33] BLÁZSIK, Z., B. IMREH: *A note on connection between PNS and set covering problems*. Acta Cybernetica **12** (1996), 309–312.
- [34] IMREH, B.: *Compositions of nondeterministic automata*. RIMS Kokyuroku **960** (1996), 44–53.
- [35] IMREH, B., M. ITO: *On α_i -product of nondeterministic automata*. Algebra Colloquium **4** (1997), 195–202.
- [36] IMREH, B.: *On α_i -product of nondeterministic tree automata*. Acta Cybernetica **13** (1997), 41–54.
- [37] BLÁZSIK, Z., CS. HOLLÓ, B. IMREH: *On Decision-Mappings Related to Process Network Synthesis Problem*. Acta Cybernetica **13** (1998), 319–328.
- [38] FÜLÖP J., F. FRIEDLER, B. IMREH: *On the reformulation of some classes of PNS-problems as set covering problems*. Acta Cybernetica **13** (1998), 329–337.
- [39] FRIEDLER, F., L. T. FAN, B. IMREH: *Process network synthesis: Problem definition*. Networks **28** (1998), 119–124.
- [40] IMREH, B., G. MAGYAR: *Empirical Analysis of Some Procedures for Solving Process Network Synthesis Problem*. Journal of Computing and Information Technology–CIT **6** (1998), 373–382.
- [41] BLÁZSIK, Z., CS. HOLLÓ, B. IMREH: *Explicit bound for the number of feasible solutions of special PNS-problem classes*. PU.M.A **9** (1998), 17–27.
- [42] GÉCSEG, F., B. IMREH, A. PLUHÁR: *On existence of finite isomorphically complete systems*. Journal of Automata, Languages, and Combinatorics **3** (1998), 77–84.
- [43] IMREH, B., M. STEINBY: *Directable nondeterministic automata*. Acta Cybernetica **14** (1999), 105–115.
- [44] IMREH, B., M. ITO: *A note on the star-product*. Acta Cybernetica **14** (1999), 99–104.
- [45] BOGDANOVIĆ, S., M. ĆIRIĆ, B. IMREH, T. PETKOVIĆ, M. STEINBY: *Traps, Extensions and Subdirect Decomposition of Unary Algebras*. Fundamenta Informatica **38**, (1999), 51–60.

- [46] ČIRIĆ, M., B. IMREH, M. STEINBY: *Subdirectly irreducible definite, reverse-definite, and generalized definite automata*. Univ. Beograd, Publ. Elektrotechn. Fak. Ser. Mat. **10** (1999), 69–79.
- [47] IMREH, B., M. ITO: *Nondeterministic directable automata and related languages*. RIMS Kokyuroku **1106** (1999), 81–87.
- [48] IMREH, B., J. FÜLÖP, F. FRIEDLER: *A note on the Equivalence of the Process Network Synthesis and Set Covering problems*. Acta Cybernetica **14** (2000), 407–502.
- [49] BLÁZSIK, Z., CS. HOLLÓ, B. IMREH, CS. IMREH, Z. KOVÁCS: *On a well-solvable class of the PNS problem*. Novi Sad Journal of Mathematics **30** (2000), 21–30.
- [50] BLÁZSIK, Z., CS. HOLLÓ, B. IMREH, CS. IMREH, Z. KOVÁCS: *On Bottleneck and k-sum version of the Process Network Synthesis Problem*. Novi Sad Journal of Mathematics **30** (2000), 11–20.
- [51] IMREH, B.: *On the equivalence of the cube-product and the generalized product of automata*. Theoretical Computer Science **245** (2000), 103–113.
- [52] BOGDANOVIĆ, S., M. ČIRIĆ, B. IMREH, T. PETKOVIĆ: *Directable automata and their generalizations: a survey*. Novi Sad J. Math. **29**, (1999), 29–69.
- [53] IMREH, B., M. ITO, A. PUKLER: *A note on the languages recognized by commutative asynchronous automata*. RIMS Kokyuroku **1166** (2000), 95–99.
- [54] IMREH, B., M. ITO, A. PUKLER: *On commutative asynchronous nondeterministic automata*. Acta Cybernetica **14** (2000), 607–617.
- [55] GÉCSEGE, F., B. IMREH: *On isomorphic representations of generalized definite automata*. Acta Cybernetica **15** (2001), 33–44.
- [56] GÉCSEGE, F., B. IMREH: *On monotone automata and monotone languages*. Journal of Automata, Languages and Combinatorics **7** (2002), 71–82.
- [57] IMREH, B.: *Automaton theory approach for solving modified PNS problems*. Acta Cybernetica **15** (2002), 327–338.
- [58] IMREH, B., CS. IMREH, M. ITO: *On directable nondeterministic trapped automata*. Acta Cybernetica **16** (2003), 37–45.
- [59] IMREH, B., CS. IMREH, M. ITO: *On directable nondeterministic monotonic automata*. Journal of Automata, Languages and Combinatorics, **8** (2003), 539–547.
- [60] BOGDANOVIĆ, S., M. ČIRIĆ, B. IMREH, T. PETKOVIĆ, M. STEINBY: *On Local Properties of Unary Algebras*. Algebra Colloquium **10** (2003), 461–478.
- [61] IMREH, B., SZ. IMREH: *A heuristic method for the asymmetric Hamiltonian p-median problem*. P.U.M.A **14** (2003), 199–206.
- [62] GÉCSEGE, F., B. IMREH: *On definite and nilpotent DR tree languages*. Journal of Automata, Languages and Combinatorics, **9** (2004), 55–60.
- [63] B. IMREH, CS. IMREH, SZ. IMREH: *Összefüzési technikák és alkalmazásaik*. Alkalmazott Matematikai Lapok **22** (2005), 85–96.
- [64] IMREH, B., M. ITO: *On regular languages determined by nondeterministic directable automata*. Acta Cybernetica **17** (2005), 1–10.
- [65] GÉCSEGE, F., B. IMREH: *On asynchronous tree automata*. Journal of Automata, Languages and Combinatorics, közlésre elfogadva
- [66] IMREH, B., KOVÁCS Z.: *A note on separation-networks and automata*, közlésre benyújtva

- [67] Z. BLÁZSIK Z., T. BARTÓK, B. IMREH, CS. IMREH, Z. KOVÁCS: *Heuristics on a Common Generalization of TSP and LOP*, közlésre benyújtva
- [68] HOLLÓ, CS., B. IMREH. CS. IMREH: *A new reduction technique for PNS problems*, közlésre benyújtva

Cikkek konferencia kiadványokban, gyűjteményes könyvekben:

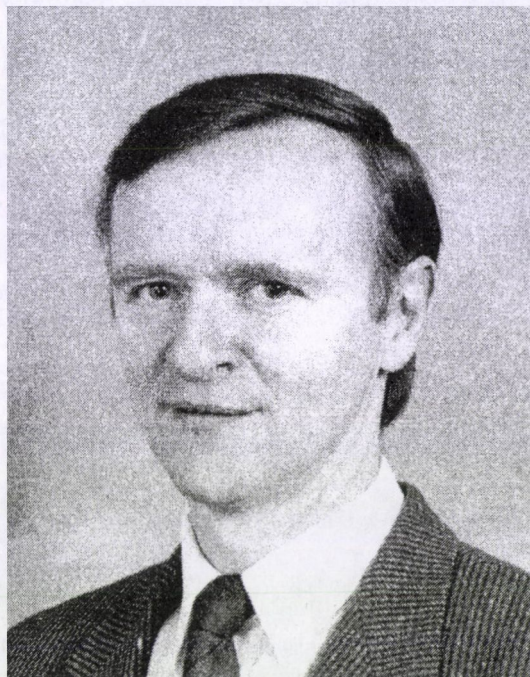
- [69] IMREH, B.: *Algebraiceszkie modeli vűcsisizlyelnűh masin*. Second Hungarian Computer Science Conference, Preprints (1977), 494–510.
- [70] IMREH, B.: *O dekompoziciji kommutativnűh avtomatov sz pomostyju α_i -proizvogyenyij*. MTA SZTAKI Tanulmányok 137/1982, 171–179.
- [71] DÖMÖSI, P., B. IMREH: *On the decomposition of cellular automata*, in: Conference on System Theoretical Aspects in Computer Science, Salgótarján (1982), 80–87.
- [72] IMREH, B.: *On completeness with respect to the quasi-direct product*, in Conference on Automata, Languages and Mathematical Systems, Salgótarján (1984), 83–89.
- [73] IMREH, B.: *On isomorphically complete systems of finite automata with respect to the α_i -products*. Applications of Mathematics in Techniques, X. National School for Scientists, Proceedings, Varna (1984), 11–15.
- [74] HORVÁTH, GY., B. IMREH: *On product of tree automata*, in: Conference on Automata, Languages and Programming Systems, Salgótarján (1986), 129–136.
- [75] GÉCSEG, F., B. IMREH: *On a special class of tree automata*, in Conference on Automata, Languages and Programming Systems, Salgótarján, (1988).
- [76] DÖMÖSI, P., Z. ÉSIK, B. IMREH: *On product Hierarchies of automata*. Lecture Notes in Computer Science 380, FCT'89, (ed. J. Csirik, J. Demetovics, F. Gécseg), Springer-Verlag, Proc., 137–145.
- [77] IMREH, B.: *On complete systems of automata*, in: Proc. of the Second International Colloquium on Words, Languages and Combinatorics, Kyoto, 1992, World Scientific (Singapore-New Jersey-London-Hong Kong) (1994), 207–215.
- [78] IMREH, B., F. FRIEDLER, L. T. FAN: *An Algorithm for Improving the Bounding Procedure in Solving Process Network Synthesis by a Branch-and-Bound Method*, in: Developments in Global Optimization, editors: I. M. Bonze, T. Csendes, R. Horst, P. M. Pardalos, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Boston, London (1996), 301–348.
- [79] IMREH, B., M. ITO, M. KATSURA: *On shuffle closures of commutative regular languages*. Proceedings of DMTS'96, Combinatorics, Complexity, & Logic, (editors: D. S. Bridges, C. S. Calude, J. Gibbons, S. Reeves, I. H., Witten), Springer-Verlag Singapore Pte. Ltd. (1997), 276–288.
- [80] IMREH, B.: *On ν_i -products of tree automata*, in: Proceedings of LIRA'97, (eds.: R. Tošić, Z. Budinac, Mala knjiga, Novi Sad, Yugoslavia, 1997, 77–84.
- [81] GÉCSEG, F., B. IMREH: *On complete sets of tree automata*, in: Proceedings of the 3rd International Conference Developments in Language Theory, Aristotle University of Thessaloniki (1997), 37–47.
- [82] BLÁZSIK Z., CS. HOLLÓ, B. IMREH: *Kiszámolható korlátok speciális PNS-probléma osztályok lehetséges megoldásainak a számára*, in: Új utak a magyar operációkutatásban, Dialóg Campus Kiadó, Budapest-Pécs (1999), 182–194.
- [83] IMREH, B., M. ITO: *On some special classes of regular languages*, in: Jewels are Forever (eds.: J. Karhumäki, H. Maurer, G. Paun and G. Rozenberg,), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo (1999), 25–34.

- [84] GÉCSEG, F., B. IMREH: *On isomorphic representation of monotone tree and nondeterministic tree automata*, in: Words, Semigroups, Transductions, eds.: M. Ito, Gh. Paun, S. Yu, World Scientific, New Jersey – London – Singapore – Hong Kong (2001), 141–154.
- [85] IMREH, B., M. ITO, M. STEINBY: *On commutative directable nondeterministic automata*, in: Grammars and Automata for String Processing from Mathematics and Computer Science to Biology and Back, eds.: Carlos Martin-Vide, Victor Mitrana, Taylor and Francis, (Topics in Computer Mathematics), London (2002), 141–150.
- [86] IMREH, B.: *Some Remarks on Asynchronous Automata*, in: Proceedings of 6th International Conference, Developments in Language Theory, eds.: M. Ito, M. Toyama, 2002. Kyoto, Springer-Verlag, LNCS **2450** (2003), 290–296.
- [87] IMREH, B., M. ITO, A. PUKLER: *On commutative asynchronous automata*, in: Words, Languages & Combinatorics III: Proceedings of the Third International Colloquium, Kyoto, Japan 2000, World Scientific Pub. Co. Inc., Singapore-New Jersey-London-Hong Kong (2004), 212–222.
- [88] BLÁZSIK, Z., B. IMREH, CS. IMREH, Z. KOVÁCS: *The TSP problem with internal transports*. Proceedings of microCAD 2006, International Scientific Conference, Material Flow Systems, Logistical Information Technology: 9–13.
- [89] BLÁZSIK, Z., B. IMREH, CS. IMREH, Z. KOVÁCS: *On a bin packing approach of a shipment construction problem*. Proceedings of microCAD 2006, International Scientific Conference, Material Flow Systems, Logistical Information Technology: 15–19.

Tanulmányok:

- [90] IMREH, B.: *Vizsgálatok az általánosított szekvenciális gépek köréből*, egyetemi doktori értekezés, (1975).
- [91] IMREH, B.: *A véges automaták izomorfian teljes rendszereiről*, kandidátusi értekezés, (1983).

KUBA ATTILA (1953-2006)



Hosszan tartó, súlyos betegség után 2006. november 1-jén elhunyt Kuba Attila egyetemi tanár, a Szegedi Tudományegyetem (SZTE) Képfeldolgozás és Számítógépes Grafika Tanszékének vezetője, sokak szeretett kollégája és mestere.

Egyetemi diplomáját 1976-ban szerezte a József Attila Tudományegyetem (JATE) matematikus szakán, egyetemi doktori fokozatot 1978-ban kapott, 1983-ban lett a matematikai tudomány kandidátusa, az akadémiai doktori fokozatot pedig 2004-ben szerezte meg. 1975-től 1993-ig a JATE Kibernetikai Laboratóriumának (később Kalmár Intézetének) tudományos munkatársa. 1993-tól az Alkalmazott Informatikai (később a Képfeldolgozás és Számítógépes Grafika) Tanszéken tanszékvezető docens, majd 2005-től egyetemi tanár.

Kuba Attila jelentős eredményeket elért tudós, iskolateremtő tanár és a tudományos közélet aktív tagja volt. Emlékének itt munkássága összefoglalásával és legfontosabb közleményei felsorolásával tisztelegnek az általa vezetett tanszék munkatársai.

1. A kutató

Kuba Attila fő kutatási területe a *diszkrét tomográfia*, melynek nemzetközileg elismert művelője volt. A diszkrét tomográfiával pályája kezdetétől egészen a haláláig lelkesen és eredményesen foglalkozott: 1975-ben „*Három-dimenziós tárgyak rekonstrukciója vastagsági vetületekből*” címmel írta diákköri dolgozatát, utolsó könyve „*Advances in Discrete Tomography and its Applications*” (melyet Gabor T. Hermannal közösen szerkesztett) pedig halála után jelent meg.

Eredményei meghatározók a diszkrét tomográfia fejlődésében. A *hu*-konvex halmazok rekonstrukciójára adott algoritmus új irányt nyitott a képrekonstrukciós algoritmusok fejlesztésében azáltal, hogy a vetületekből történő előállításához geometriai információt is figyelembe vett. További szép elméleti eredményeket ért el a mérhető halmazok vetületekből történő rekonstrukciója és az abszorpciós vetületek kutatásával.

Kuba Attila kutatói tevékenysége és közleményei nem korlátozódtak a diszkrét tomográfiára: jelentős eredményeket ért el az *orvosi képfeldolgozás* és a *diszkrét geometria* számos területén is. Tudásával, tapasztalatával mindig segítségére volt kollégáinak, a tanszéken nyugodt, alkotó légkört teremtett.

Kutatómunkáját *Kalmár László-díjjal* (1981) és *Széchenyi-ösztöndíjjal* (1997) ismerték el.

2. Az iskolateremtő tanár

Kuba Attila szakmai tevékenységének fontos eleme volt az oktatás és az utánpótlás nevelés is. Személyéhez kötődik a *szegedi képfeldolgozó iskola* megteremtése, számos kurzus (pl. Digitális képfeldolgozás, Számítógépes grafika, Orvosi képfeldolgozás) anyagának kidolgozása és oktatása, a Képfeldolgozás szakirány megteremtése, speciálkollégiumok és doktori kurzusok tartása.

Számos hallgatót segített témavezetőként diplomamunkájuk és diákköri dolgozatuk elkészítésében, sokakat bevont a tanszéken folyó kutató- és fejlesztőmunkába, a legtehetségesebbeket TEMPUS, CEEPUS és doktori ösztöndíjakhoz segítette. Tizenhárom éven át szervezte a nemzetközi Képfeldolgozó Nyári Iskolát (*Summer School on Image Processing*), melynek nyolc alkalommal házigazdája is volt (www.inf.u-szeged.hu/~ssip).

Oktatómunkáját 1997-ben *Fáy András (iskolateremtő mestertanár) díjjal* értékelték.

3. A tudományos közélet aktív résztvevője

Kuba Attila számos tudományos társaságnak volt tagja, titkára illetve elnöke. Ezek közül a legfontosabbak:

- Bolyai János Matematikai Társulat,
- Neumann János Számítógép-tudományi Társaság,
- Képfeldolgozók és Alakfelismerők Társasága,
- Magyarországi Humboldt-Egyesület,
- International Association for Pattern Recognition,
Information Processing in Medical Society.

Számos rangos folyóiratnál volt szerkesztőbizottsági tag (pl. *IEEE Trans. on Image Processing*, *Alkalmazott Matematikai Lapok*), vendégszerkesztő és rendszeres bíráló. Készséggel segítette a nemzetközi konferenciák rendezőit programbizottsági tagként és szervezője volt az alábbi nemzetközi rendezvényeknek:

- Discrete Tomography Workshop, Szeged, 1997.
- 16th Int. Conf. on Information Processing in Medical Imaging, IPMI'99, Visegrád, 1999.
- 2. Ungarische Humboldt-Konferenz, Budapest, 2001.
- 9th Int. Workshop on Combinatorial Image Analysis, IWCIA 2003, Palermo, Italy, 2003.
- Workshop on Discrete Tomography and Its Applications. New York, USA, 2005.
- 3. Ungarische Humboldt-Konferenz, Budapest, 2006.
- 13th Int. Conf. on Discrete Geometry in Computer Imagery, DGCI 2006, Szeged, 2006.

Kuba Attila hatalmas munkabíráásával, szakmai hozzáértésével, kedves, szelíd és megnyerő személyiségével nagy tekintélyre tett szert. Hazai és nemzetközi kapcsolataival az SZTE Informatikai Intézetének elismertségét növelte. Kollégáit, tanítványait külföldi tanulmányutakhoz segítette, és lehetővé tette számukra, hogy bekapcsolódjanak több, a képfeldolgozás területén vezető intézet kutatómunkájába.

Emléklapjára (www.inf.u-szeged.hu/~kuba/inmemoriam.html) a világ minden tájáról érkeztek részvétnyilvánítások és visszaemlékezések. Valamennyi üzenetben közös, hogy egyszerre szólnak a tiszteletreméltó tudósról és a kiváló emberről.

Kuba Attila válogatott közleményei

Szerkesztett könyvek, gyűjteményes kötetek, folyóirat különszámok

- [1] G. T. HERMAN, A. KUBA (editors): *Discrete Tomography (Special Issue)*. Int. J. Imaging Systems and Technology **9**, No 2/3 (1998)
- [2] G. T. HERMAN, A. KUBA (editors): *Discrete Tomography: Foundations, Algorithms, and Applications*. Birkhauser, Boston (1999)
- [3] A. KUBA, M. SAMAL, A. TODD-POKROPEK (editors): *Information Processing in Medical Imaging*. Proc. 16th Int. Conf. Information Processing in Medical Imaging, IPMI'99, Lecture Notes in Computer Science 1613, Springer-Verlag, Berlin (1999)
- [4] A. DEL LUNGO, V. DI GESU, A. KUBA (editors): *Proc. 9th Int. Workshop of Combinatorial Image Analysis*. IWCI 2003, Electronic Notes on Discrete Mathematics **12**, Elsevier (2003)
- [5] G. T. HERMAN, A. KUBA (editors): *Proc. Workshop on Discrete Tomography and its Applications*. Electronic Notes in Discrete Mathematics **20**, Elsevier (2005)
- [6] V. DI GESU, A. KUBA (editors): *Special Issue on IWCI 2003*. Discrete Applied Mathematics **151**, No 1-3, (2005)
- [7] A. KUBA, L.G. NYÜL, K. PALÁGYI (editors): *Proc. 13th Int. Conf. Discrete Geometry for Computer Imagery*. DGCI 2006, Lecture Notes in Computer Science **4245**, Springer-Verlag, Berlin (2006)
- [8] G. T. HERMAN, A. KUBA (editors): *Advances in Discrete Tomography and its Applications*. Birkhäuser, Boston (2007)

Referált folyóiratokban közölt angol nyelvű cikkek

- [9] A. KUBA, L. CSERNAY: *Simulation studies in reconstruction tomography*. Eur. J. Nucl. Med. **4** (1979), 144.
- [10] A. KUBA, L. CSERNAY: *Picture processing possibilities in the experimental ECAT-software of SEGAMS*. NucCompact **13** (1982), 131-136.
- [11] A. KUBA: *Emission computed tomography*. Compact News in Nuclear Medicine **15** (1984), 174-178.
- [12] A. KUBA: *Reconstruction of two-directionally connected binary patterns from their two orthogonal projections*. Computer Vision, Graphics, and Image Processing **27** (1984), 249-265.
- [13] A. KUBA, H. FEISTEL, J. MAHLSTEDT, F. WOLF: *New method to present ECT images*. Compact News in Nuclear Medicine **15**, 174-178 (1984)
- [14] A. KUBA, H. FEISTEL, J. MAHLSTEDT, F. WOLF: *3D ROI techniques in SPECT*. Eur. J. Nucl. Med. **9**, A130 (1984)
- [15] A. KUBA, A. VOLCIC: *Characterisation of measureable plane sets which are reconstructable from their two projections*. Inverse Problems **4** (1988), 513-527.
- [16] E. MÁTÉ, A. KUBA, L. CSERNAY: *Application of reciprocal matrices in SPECT*. Nuklearmedizin (1988), 37-40.
- [17] L. CSERNAY, L. PÁVICS, T. DÓCZI, A. KUBA, J. LÁNG, M. BODOSI: *Preliminary data of human brain examinations with Hungarian single photon emission computer tomograph system (SPECT)*. Med. Razgl. **27** (Suppl. 4) (1988), 174-175.

- [18] D. KÖLZOW, A. KUBA, A. VOLČIC: *An algorithm for reconstructing convex bodies from their projections*. Discrete and Computational Geometry **4** (1989), 205–237.
- [19] A. KUBA: *Determination of the structure of the class $A(R,S)$ of $(0,1)$ -matrices*. Acta Cybernetica **9** (1989), 121–132.
- [20] A. KUBA: *Reconstruction of measurable plane sets from their two projections taken in arbitrary directions*. Inverse Problems **7** (1991), 101–107.
- [21] A. KUBA, Á. MAKAY, E. MÁTÉ, L. CSERNAY: *Data processing system for nuclear medicine images*. Int. J. Imaging Systems and Technology **4** (1992), 51–56.
- [22] E. MÁTÉ, J. MESTER, L. CSERNAY, A. KUBA, S. MADANI, Á. MAKAY: *Three-dimensional presentation of the Fourier amplitude and phase*. J. Nuclear Medicine **33** (1992), 458–462.
- [23] M. F. LYTTHGOE, H. DAVIES, A. KUBA, M. TÓTH-ABONYI: *Can dynamic krypton-81m imaging separate regional ventilation and volume?* J. Nuclear Medicine **33** (1992), 1935–1939.
- [24] A. KUBA, A. VOLČIC: *The structure of the class of non-uniquely reconstructable sets*. Acta Sci. Math. **58** (1993), 359–384.
- [25] A. KUBA: *Reconstruction of unique binary matrices with prescribed elements*. Acta Cybernetica **12** (1995), 57–70.
- [26] R. AHARONI, G.T. HERMAN, A. KUBA: *Binary vectors partially determined by linear equation systems*. Discrete Mathematics **171** (1997), 1–16.
- [27] J. H. B. KEMPERMAN, A. KUBA: *Reconstruction of two-valued matrices from their two projections*. Int. J. Imaging Systems and Technology **9** (1998), 110–117.
- [28] A. TANÁCS, K. PALÁGYI, A. KUBA: *Medical image registration based on interactively identified anatomical landmark points*. Machine Graphics & Vision **7** (1998), 151–158.
- [29] K. PALÁGYI, A. KUBA: *A 3D 6-subiteration thinning algorithm for extracting medial lines*. Pattern Recognition Letters **19** (1998), 613–627.
- [30] K. PALÁGYI, A. KUBA: *A hybrid thinning algorithm for 3D medical images*. J. Comput. Inform. Techn. **6** (1998), 149–164.
- [31] J. KIVIJARVI, T. OJALA, T. KAUKORANTA, A. KUBA, L. NYÜL, O. NEVALAINEN: *A comparison of lossless compression methods for medical images*. Computerized Medical Imaging and Graphics **22** (1998), 323–339.
- [32] K. PALÁGYI, A. KUBA: *A parallel 3D 12-subiteration thinning algorithm*. Graphical Models and Image Processing **61** (1999), 199–221.
- [33] K. PALÁGYI, E. SORANTIN, Cs. HALMAI, A. KUBA: *3D thinning and its applications to medical image processing*. Task Quarterly **3** (1999), 397–408.
- [34] A. KUBA, E. BALOGH: *Reconstruction of convex 2D discrete sets in polynomial time*. Theor. Comput. Sci. **283** (2002), 223–242.
- [35] A. KUBA, M. NIVAT: *Reconstruction of discrete sets with absorption*. Linear Algebra and Its Applications **339** (2001), 171–194.
- [36] E. BALOGH, A. KUBA, Cs. DÉVÉNYI, A. DEL LUNGO: *Comparison of algorithms for reconstructing hv-convex discrete sets*. Linear Algebra and Its Applications **339** (2001), 23–35.
- [37] A. TANÁCS, G. CZÉDLI, K. PALÁGYI, A. KUBA: *Affine matching of two sets of points in arbitrary dimensions*. Acta Cybernetica **15** (2001), 101–106.
- [38] S. BRUNETTI, A. DEL LUNGO, F. DEL RISTORO, A. KUBA, M. NIVAT: *Reconstruction of 4- and 8-connected convex discrete sets from row and column projections*. Linear Algebra and Its Applications **339** (2001), 37–57.

- [39] A. KUBA, A. NAGY, E. BALOGH: *Reconstruction of h -convex binary matrices from their absorbed projections*. Discrete Applied Mathematics **139** (2004), 137–148.
- [40] A. KUBA, L. RUSKÓ, L. RODEK, Z. KISS: *Preliminary studies of discrete tomography in neutron imaging*. IEEE Trans. Nucl. Sci. **51** (2005), 380–385.
- [41] G. T. HERMAN, A. KUBA: *Discrete tomography in medical imaging*. Proceedings of the IEEE **91** (2003), 1612–1626.
- [42] A. KUBA, M. NIVAT: *A sufficient condition for non-uniqueness in binary tomography with absorption*. Discrete Applied Mathematics **346** (2005), 335–357.
- [43] A. TANÁCS, A. KUBA: *Evaluation of a fully automatic medical image registration algorithm based on mutual information*. Acta Cybernetica **16** (2003), 327–336.
- [44] B. SCHILLINGER, N. KARDJILOV, A. KUBA: *Region of interest tomography of bigger than detector samples*. Applied Radiation and Isotopes **61** (2004), 561–565.
- [45] A. KUBA, L. RODEK, Z. KISS, L. RUSKÓ, A. NAGY, M. BALASKÓ: *Discrete tomography in neutron radiography*. Nuclear Instr. and Methods in Physics Research A542 (2005), 376–382.
- [46] M. BALASKÓ, E. SVÁB, A. KUBA, Z. KISS, L. RODEK, A. NAGY: *Pipe corrosion and deposit study using neutron- and gamma-radiation sources*. Nuclear Instr. and Methods in Physics Research A542 (2005), 302–308.
- [47] M. BALASKÓ, A. KUBA, A. NAGY, Z. KISS, L. RODEK, L. RUSKÓ: *Neutron- gamma- and X-ray three-dimensional computer tomography at the Budapest research reactor*. Nuclear Instr. and Methods in Physics Research A542 (2005), 22–27.
- [48] A. NAGY, A. KUBA: *Reconstruction of binary matrices from fan-beam projections*. Acta Cybernetica **17** (2005), 359–383.
- [49] P. BALÁZS, E. BALOGH, A. KUBA: *Reconstruction of 8-connected but not 4-connected h -convex discrete sets*. Discrete Applied Mathematics **147** (2005), 149–168.
- [50] S. ZOPF, A. KUBA: *Reconstruction of measurable sets from two generalized projections*. Electronic Notes in Discrete Mathematics **20** (2005), 47–66.
- [51] L. RUSKÓ, A. KUBA: *Multi-resolution method for binary tomography*. Electronic Notes in Discrete Mathematics **20** (2005), 299–311.
- [52] A. FROSINI, S. RINALDI, E. BARCUCCI, A. KUBA: *An efficient algorithm for reconstructing binary matrices from horizontal and vertical absorbed projections*. Electronic Notes in Discrete Mathematics **20** (2005), 347–363.
- [53] A. KUBA, L. RUSKÓ, Z. KISS, A. NAGY: *Discrete reconstruction techniques*. Electronic Notes in Discrete Mathematics **20** (2005), 385–398.
- [54] S. KRIMMEL, J. BAUMANN, Z. KISS, A. KUBA, A. NAGY, J. STEPHAN: *Discrete tomography for reconstruction from limited view angles in non-destructive testing*. Electronic Notes in Discrete Mathematics **20** (2005), 455–474.
- [55] Z. KISS, L. RODEK, A. NAGY, A. KUBA, M. BALASKÓ: *Reconstruction of pixel-based and geometric objects by discrete tomography*. Simulation and physical experiments. Electronic Notes in Discrete Mathematics **20** (2005), 375–491.
- [56] A. NAGY, A. KUBA, M. SAMAL: *Reconstruction of factor structures using discrete tomography method*. Electronic Notes in Discrete Mathematics **20** (2005), 519–534.
- [57] A. KUBA, G. T. HERMAN: *Optimization in the medical applications of discrete tomography*. SIAG/Optimization Views-and-News **17** (2006), 2–8.
- [58] K. OLLÉ, B. ERDŐHELYI, A. KUBA, Cs. HALMAI, E. VARGA: *MedEdit: A computer assisted image processing and navigation system for orthopedic-trauma surgery*. Acta Cybernetica **17** (2006), 589–603.

- [59] Z. KISS, L. RODEK, A. KUBA: *Image reconstruction and correction methods in neutron and X-ray tomography*. Acta Cybernetica **17** (2006), 557–587.
- [60] A. NAGY, A. KUBA: *Parameter settings for reconstructing binary matrices from fan-beam projections*. Journal of Computing and Information Technology **14** (2006), 101–110.

Gyűjteményes kötetben megjelent angol nyelvű cikkek

- [61] A. KUBA, L. CSERNAY: *Reconstruction of spatial distribution of isotopes from orthogonal projections*. In Proc. IVth Symp. on the Use of Radioisotopes in Gastroenterology (1977)
- [62] A. KUBA, A. VOLČIC: *Reconstruction of plane sets from two projections*. In Proc. Int. Conf. Functional Analysis and Approximation (1988), 183–195.
- [63] Á. MAKAY, A. KUBA, E. MÁTÉ, M. NAGY: *Software system for nuclear medicine data processing*. In Proc. Symp. on Programming Languages and Software Tools (1989), 104–107.
- [64] A. KUBA, Z. ALEXIN, L.G. NYÜL, A. NAGY, K. PALÁGYI, M. NAGY, L. ALMÁSI, L. CSERNAY: *DICOM based PACS and its application in the education*. In Proc. 14th Int. EuroPACS Meeting, EuroPACS'97 (1996), 46–49.
- [65] K. PALÁGYI, A. KUBA: *A thinning algorithm to extract medial lines from 3D medical images*. In Proc. 15th Int. Conf. Information Processing in Medical Imaging, IPMI'97, Lecture Notes in Computer Science **1230**, Springer (1997), 411–416.
- [66] K. PALÁGYI, A. KUBA: *A parallel 12-subiteration thinning algorithm to extract medial lines*. In Proc. 7th Int. Conf. Computer Analysis of Images and Patterns, CAIP'97, Lecture Notes in Computer Science **1296**, Springer (1997), 400–407.
- [67] A. NAGY, L.G. NYÜL, A. KUBA, Z. ALEXIN, L. ALMÁSI: *Problems and solutions: One year experience with the SZOTE-PACS*. In Proc. 15th Int. EuroPACS Meeting, EuroPACS'97 (1997), 39–42.
- [68] A. NAGY, L.G. NYÜL, Z. ALEXIN, A. KUBA: *The software system of the picture archiving and communication system in Szeged*. In Proc. 20th Int. Conf. Information Technology Interfaces, ITI'98 (1998), 183–187.
- [69] L. MARTONOSSY, L.G. NYÜL, A. NAGY, A. KUBA, O. NEVALAINEN, L. CSERNAY: *Lossless image compression in SZOTE-PACS*. In Proc. 16th Int. EuroPACS Meeting, EuroPACS'98 (1998), 95–98.
- [70] L. ALMÁSI, ZS. SÓTI, A. KUBA, Z. ALEXIN, A. NAGY, L.G. NYÜL, L. CSERNAY: *Experience with the SZOTE-PACS starting operation*. In Proc. 16th Int. EuroPACS Meeting, EuroPACS'98 (1998), 43–44.
- [71] L. CSERNAY, ZS. SÓTI, L. ALMÁSI, A. KUBA: *Picture archiving with the SZOTE-PACS for scientific purposes*. In Proc. 16th Int. EuroPACS Meeting, EuroPACS'98 (1998), 45–46.
- [72] A. KUBA, G. T. HERMAN: *Discrete Tomography: A historical overview*. In G. T. Herman, A. Kuba (Editors): Discrete Tomography: Foundations, Algorithms, and Applications, Birkhauser, Boston (1999), 1–30.
- [73] A. KUBA: *Reconstruction of two-valued functions and matrices*. In G. T. Herman, A. Kuba (Editors): Discrete Tomography: Foundations, Algorithms, and Applications, Birkhauser, Boston (1999), 133–158.
- [74] A. KUBA: *Reconstruction in different classes of 2D discrete sets*. In Proc. 8th Int. Conf. on Discrete Geometry for Computer Imagery, DGCI'99, Lecture Notes in Computer Science **1568**, Springer-Verlag (1999), 1153–1163.

- [75] K. PALÁGYI, A. KUBA: *Directional 3D thinning using 8 subiterations*. In Proc. 8th Int. Conf. on Discrete Geometry for Computer Imagery, DGCI'99, Lecture Notes in Computer Science 1568, Springer-Verlag (1999), 325–336.
- [76] L. MARTONOSSY, A. NAGY, L.G. NYÜL, Z. ALEXIN, A. KUBA: *Image compression in SZOTÉ-PACS (Picture Archiving and Communication System) in Szeged*. In Proc. 21st Int. Conf. Information Technology Interfaces, ITI'99 (1999), 305–310.
- [77] A. TANÁCS, K. PALÁGYI, A. KUBA: *Target registration error of point-based methods assuming rigid-body and linear motions*. In Proc. Int. Conf. Biomedical Image Registration, WBIB'99 (1999), 223–233.
- [78] A. KUBA, M. NIVAT: *Reconstruction of discrete sets with absorption*. In Proc. 9th Int. Conf. on Discrete Geometry for Computer Imagery, DGCI 2000, Lecture Notes in Computer Science 1953, Springer-Verlag (2000), 137–148.
- [79] A. KUBA, G.T. HERMAN, S. MATEJ, A. TODD-POKROPEK: *Medical applications of discrete tomography*. In D.Z. Du, P.M. Pardalos, J. Wang (Eds): Discrete Mathematical Problems with Medical Applications, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, vol. 55, AMS, Rhode Island (2000), 195–208.
- [80] E.H. LEHMANN, B. SCHILLINGER, S. BAECHLER, M. BALASKO, A. KUBA, W. TREIMER, R. ROSA, G. BAYON: *Status and prospects of neutron tomography in Europe*. In Proc. 15th World Conference on Nondestructive Testing, WCNDT 2000 (2000)
- [81] A. TANÁCS, G. CZÉDLI, K. PALÁGYI, A. KUBA: *Point based registration assuming affine motion*. In Proc. Int. Workshop Algebraic Frames for the Perception-Action Cycle, AFPAC 2000, Lecture Notes in Computer Science 1888, Springer (2000), 329–338.
- [82] K. PALÁGYI, E. SORANTIN, E. BALOGH, A. KUBA, Cs. HALMAI, B. ERDŐHELYI, K. HAUSEGGER: *A sequential 3D thinning algorithm and its medical applications*. In Proc. 17th Int. Conf. Information Processing in Medical Imaging, IPMI 2001, Lecture Notes on Computer Sciences 2082, Springer-Verlag (2001), 409–415.
- [83] E. BALOGH, A. KUBA: *Reconstruction algorithms for hv-convex 4- and 8-connected discrete sets*. In Proc. 2nd Int. Symp. Image and Signal Processing and Analysis, ISPA 2001 (2001), 49–54.
- [84] A. KUBA, A. NAGY: *Reconstruction of hv-convex binary matrices from their absorbed projections*. In Proc. 8th Int. Workshop Combinatorial Image Analysis, IWCIA 2001 (2001), 383–393.
- [85] E. BALOGH, E. SORANTIN, L.G. NYÜL, K. PALÁGYI, A. KUBA, G. WERKGARTNER, E. SPULLER: *Virtual dissection of the colon: Technique and first experiments with artificial and cadaveric phantoms*. In Proc. Medical Imaging 2002: Image Processing, Proceedings of SPIE Vol. 4681 (2002), 713–721.
- [86] A. KUBA, L. RUSKÓ, L. RÓDEK, Z. KISS: *Application of discrete tomography in neutron imaging*. In Proc. 7th World Conf. on Neutron Imaging (2005), 361–371.
- [87] K. OLLÉ, B. ERDŐHELYI, E. VARGA, Cs. HALMAI, A. KUBA: *MedEdit: A computer assisted planning system for orthopedic-trauma surgery*. In Proc. 25th Int. Conf. Information Technology Interfaces (2003), 507–512.
- [88] P. BALÁZS, E. BALOGH, A. KUBA: *A fast algorithm for reconstructing hv-convex 8-connected but not 4-connected discrete sets*. In Proc. 11th Int. Conf. on Discrete Geometry for Computer Imagery, DGCI 2003, Lecture Notes in Computer Science 2886, Springer (2003), 388–397.
- [89] E. BALOGH, A. KUBA, A. DEL LUNGO, M. NIVAT: *Reconstruction of binary matrices from absorbed projections*. In Proc. 10th Int. Conf. Discrete Geometry for Computer Imagery, DGCI 2002, Lecture Notes on Computer Sciences 2301, Springer-Verlag (2002), 392–403.

- [90] A. KUBA, G. WOEINGER: *Two remarks on reconstructing binary vectors from their absorbed projections*. In Proc. 12th Int. Conf. Discrete Geometry for Computer Imagery, DGCI 2005, Lecture Notes on Computer Sciences 3429, Springer-Verlag (2005), 148–152.
- [91] M. BALASKÓ, ZS. BALASKÓ, E. BALOGH, A. TANÁCS, E. KATONA, A. KUBA: *Composition of radiography pictures of whole helicopter rotor blades in Hungary*. In Proc. 7th World Conf. on Neutron Imaging (2005), 637–642.
- [92] A. TANÁCS, E. MÁTÉ, A. KUBA: *Application of automatic image registration for pelvic CT images*. In Proc. Joint Hungarian-Austrian Conf. on Image Processing and Pattern Recognition (2005), 359–366.
- [93] L. G. NYÜL, J. KANYÓ, E. MÁTÉ, G. MAKAY, E. BALOGH, M. FIDRICH, A. KUBA: *Method for automatically segmenting the spinal cord and canal from 3D CT images*. In Proc. Joint Hungarian-Austrian Conf. on Image Processing and Pattern Recognition (2005), 311–318.
- [94] Z. KISS, A. KUBA, A. NAGY, L. RODEK, L. RUSKÓ: *Reconstruction of discrete tomographic images*. In Proc. Joint Hungarian-Austrian Conf. on Image Processing and Pattern Recognition (2005), 279–286.
- [95] L. G. NYÜL, J. KANYÓ, E. MÁTÉ, G. MAKAY, E. BALOGH, M. FIDRICH, A. KUBA: *Method for automatically segmenting the spinal cord and canal from 3D CT images*. In Proc. 11th Int. Conf. on Computer Analysis of Images and Patterns, CAIP 2005, Lecture Notes on Computer Sciences **3691** (2005), 456–463.
- [96] A. TANÁCS, E. MÁTÉ, A. KUBA: *Application of automatic image registration in a segmentation framework of pelvic CT images*. In Proc. 11th Int. Conf. on Computer Analysis of Images and Patterns, CAIP 2005, Lecture Notes on Computer Sciences **3691** (2005), 628–635.
- [97] S. WEBER, T. SCHÜLE, A. KUBA, C. SCHNÖRR: *Binary tomography with deblurring*. In Proc. 11th Int. Workshop Combinatorial Image Analysis, IWCI 2006, Lecture Notes on Computer Sciences 4040, Springer-Verlag (2006), 375–388.
- [98] S. BRUNETTI, A. DAURAT, A. KUBA: *Fast filling operations used in the reconstruction of convex lattice sets*. In Proc. 13th Int. Conf. Discrete Geometry for Computer Imagery, DGCI 2006, Lecture Notes in Computer Science **4245** (2006), 98–109.
- [99] S. WEBER, A. NAGY, T. SCHÜLE, C. SCHNÖRR, A. KUBA: *A benchmark evaluation of large-scale optimization approaches to binary tomography*. In Proc. 13th Int. Conf. Discrete Geometry for Computer Imagery, DGCI 2006, Lecture Notes in Computer Science **4245** (2006), 146–156.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok megjelenését támogatja
a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

A kiadásért felelős a BJMT főtítkára
Szedte és tördelte Éliás Mariann

Nyomta a Nagy és Társa Kft., Budapest
Felelős vezető: Fódi Gábor

Budapest, 2007
Megjelent 18 (A/5) ív terjedelemben
250 példányban
HU ISSN 0133-3399

ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A kéziratok gépelését olyan formában kérjük, hogy minden gépelt oldal 25, egyenként átlag 50 betűhelyes sort tartalmazzon. A közlésre szánt dolgozatokat e-mailen az `aml@math.elte.hu` címre kérjük elküldeni az ábrákat tartalmazó fájlokkal együtt. Előnyben részesülnek a \TeX -ben elkészített dolgozatok.

A kéziratok szerkezeti felépítésének a következő követelményeket kell kielégíteni. A fejlécnek tartalmaznia kell a dolgozat címét és a szerző teljes nevét. A fejléc után egy, képletet nem tartalmazó, legfeljebb 200 szóból álló kivonatot kell minden esetben megadni. A dolgozatot címmel ellátott szakaszokra kell bontani, és az egyes szakaszokat arab sorszámozással kell ellátni. Az esetleges bevezetésnek mindig az első szakaszt kell alkotnia. Az irodalomjegyzék után, a kézirat befejezéseképpen fel kell tüntetni a szerző teljes nevét és a munkahelye (illetve lakása) pontos címét. A dolgozatban előforduló képleteket szakaszonként újrakezddően, a képlet előtt két zárójel közé írt kettős számozással kell azonosítani. Természetesen nem szükséges minden képletet számozással ellátni. Az esetleges definíciókat és tételeket (segédteteleket és lemmákat) ugyancsak szakaszonként újrakezddő, kettős számozással kell ellátni. Kérjük a szerzőket, hogy ezeket, valamint a tételek bizonyítását a szövegben kellő módon emeljék ki. Minden dolgozathoz csatolni kell egy angol, német francia vagy orosz nyelvű, külön oldalra gépelt összefoglalót.

Mind az ábrákat, mind a lábjegyzeteket a dolgozat szakaszokra bontásától független, folytatólagos arab sorszámozással kell ellátni. Az ábrák elhelyezését a dolgozat megfelelő helyén, széljegyzetként feltüntetett, ábraazonosító sorszámokkal kell megadni. A lábjegyzetekre a dolgozatban belül az azonosító sorszám felső indexkénti használatával lehet hivatkozni.

Az irodalmi hivatkozások formája a következő. Minden hivatkozást fel kell sorolni a dolgozat végén található irodalomjegyzékben, a szerzők, illetve a társszerzők esetén az első szerző neve szerint alfabetikus sorrendben úgy, hogy a cirill betűs szerzők nevét a Mathematical Reviews átírási szabályai szerint latin betűsre kell átírni. A folyóiratban megjelent cikkekre [1], a könyvekre [5], a kötetben megjelent dolgozatokra [4], a disszertációkra [3] és a gépi program leírásokra [2] a következő minta szerint kell hivatkozni:

- [1] FARKAS, J.: *Über die Theorie der einfachen Ungleichungen*. Journal für die reine und angewandte Mathematik 124, (1902) 1–27.
- [2] KÉRI, G.: „DUALSIMP”, rutin a CDC 3300-ás gépekre (Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, CDC 3300 felhasználói ismertetők 2. 1973. május) 19–20.
- [3] PRÉKOPA, A.: *„Sztochasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról”*, doktori értekezés. Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 1970.
- [4] PRABHU, N. U.: *„Recent research on the ruin problem of collective risk theory”*, in: Inventory Control and Water Storage. Ed. A. Prékopa (János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, Amsterdam–London, (1973) 221–228.
- [5] ZOUTENDIJK, G.: *Methods of Feasible Directions* (Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York, 1960).

A dolgozatok szövegében az irodalmi hivatkozás számait szögletes zárójelben kell megadni, mint például [5] vagy [4, 76–78]. A szerzők a dolgozatukról 50 darab ingyenes különlenyomatot kapnak. A dolgozatok után szerzői díjat az Alkalmazott Matematikai Lapok nem fizet.

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Bilen Filiz, Csizmadia Zsolt, Illés Tibor, Új monoton jellegű szimplex algoritmusok elemzése</i>	163
<i>Iván Szabolcs, Az iterált shuffle művelet alkalmazása reguláris nyelveken</i>	187
<i>Szabó Zoltán, Lőrincz András, Többrétegű Kerceptron</i>	209
<i>Demetrovics János, Molnár András, Bernhard Thalheim, Funkcionális függőségek grafikus axiomatizációja</i>	223
<i>Sima Dezső, Korszakváltás a processzorok fejlődésében</i>	265
<i>Mihálykóné Orbán Éva, Lakatos G. Béla, Mihálykó Csaba, Tartálméretezési problémák vizsgálatának háttere</i>	277
<i>Gaal György, Farkas Gyula, a Kolozsvári Ferenc József Tudományegyetem tanára</i>	303
<i>Dr. Imreh Balázs emlékére,</i>	319
<i>Kuba Attila (1953–2006),</i>	327

INDEX

<i>Zsolt Csizmadia, Filiz Bilen, Tibor Illés, A new analysis for monotonic type simplex algorithms for feasibility problems</i>	163
<i>Szabolcs Iván, On the iterated shuffle of some regular languages</i>	187
<i>Zoltán Szabó, András Lőrincz, Multilayer Kerceptron</i>	209
<i>János Demetrovics, András Molnár, Bernhard Thalheim, Graphical axiomatization of sets of functional dependencies in relational databases</i>	223
<i>Dezső Sima, The dawn of a new era in processor evolution</i>	265
<i>Éva Orbán, Béla G. Lakatos, Csaba Mihálykó, Mathematical background of sizing intermediate storages under stochastic operational conditions</i>	277
<i>György Gaal, Gyula Farkas as Professor of the Franz Joseph University from Cluj/Kolozsvár</i>	303
<i>To the memory of Balázs Imreh,</i>	319
<i>Attila Kuba (1953–2006),</i>	327